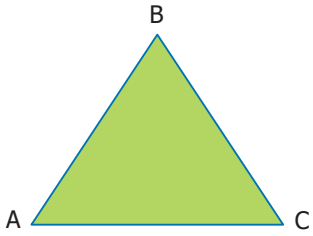
TRIÁNGULOS Y LÍNEAS NOTABLES

DESARROLLO DEL TEMA

TRIÁNGULO



Elementos:
- Vértices: A, B, C
- Lados: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$

Definición:
Perímetro = 2p
2p = AB + BC + AC.

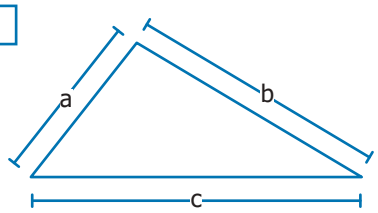
Nótese: parte sombreada es la región interior

Observación:
(Región interior) ∪ (△ABC) = Región triangular ABC

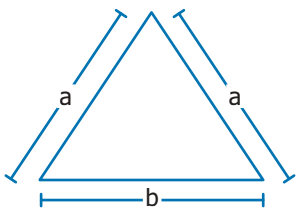
I. CLASIFICACIÓN

1. Por la medida de sus lados:

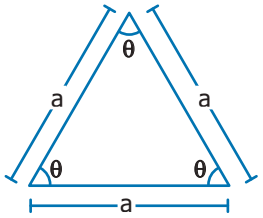
$a \neq b \neq c$



Escaleno



Isósceles



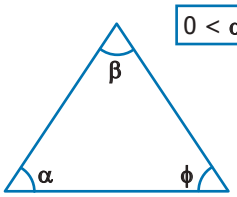
Equilátero

$\theta = 60°$

2. Por la medida de sus ángulos interiores

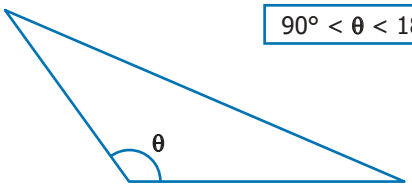
A) Oblicuángulos

$0 < \alpha, \beta, \phi < 90°$



α, β, ϕ: agudos
Acutángulos

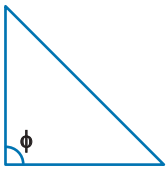
$90° < \theta < 180°$



θ: obtuso
Obtusángulos

B) Rectángulos

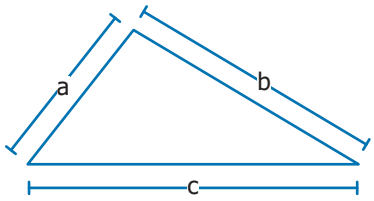
$\theta = 90°$



ϕ: ángulo recto

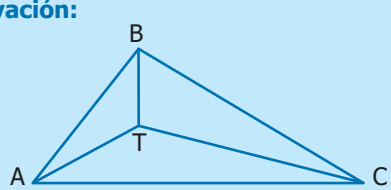
II. TEOREMAS BÁSICOS

* **Existencia**



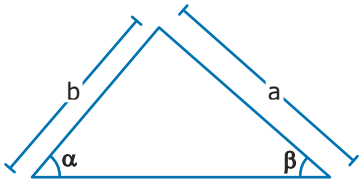
$b - a < c < b + a$

Observación:

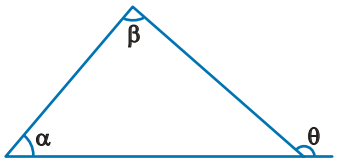


$p < TA + TB + TC < 2p$

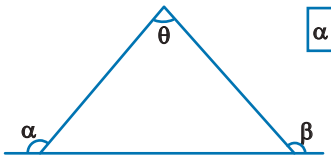
* **Correspondencia**



Si $\alpha > \beta$
$\Rightarrow a > b$

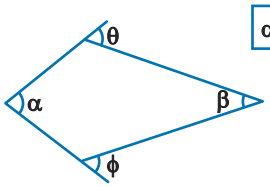


$\theta = \alpha + \beta$



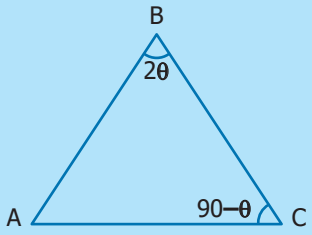
$\alpha + \beta = \theta + 180°$

$\alpha + \beta = \theta + \gamma$

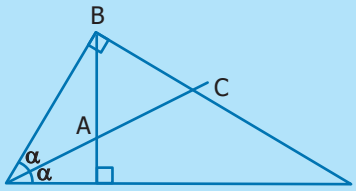


$\alpha + \beta = \theta + \phi$

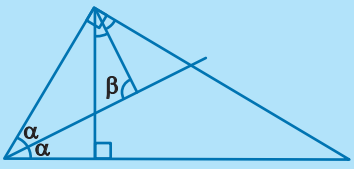
Observaciones:



△ABC: isósceles



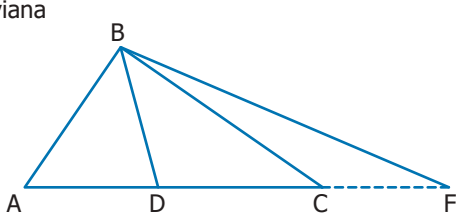
AB = BC



β = 90°

LÍNEAS NOTABLES

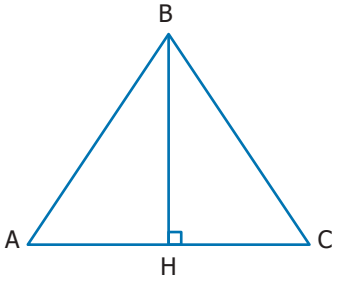
- Ceviana



$\overline{BD}$: Ceviana interior

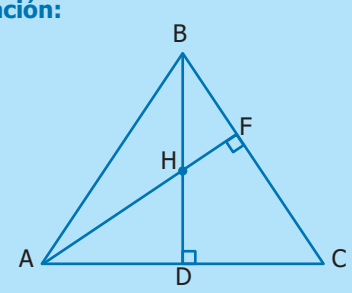
$\overline{BF}$: Ceviana exterior

- Altura



$\overline{BH}$: Altura

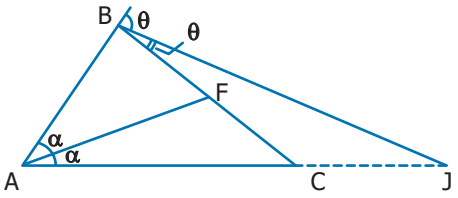
Observación:



H: ortocentro

$m\angle BCA = m\angle AHD$

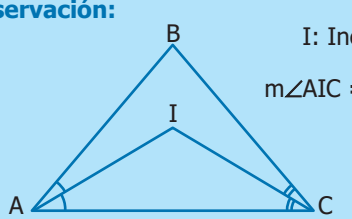
- Bisectriz



$\overline{AF}$: Bisectriz interior

$\overline{BJ}$: Bisectriz exterior

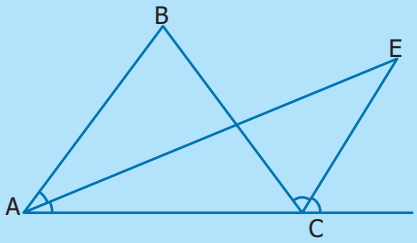
Observación:



I: Incentro

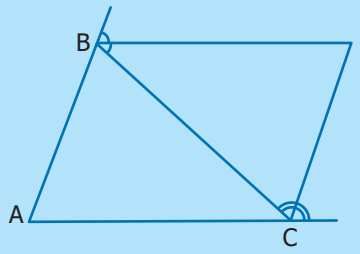
$m\angle AIC = 90 + \frac{\hat{B}}{2}$

Observación:



E: Excentro

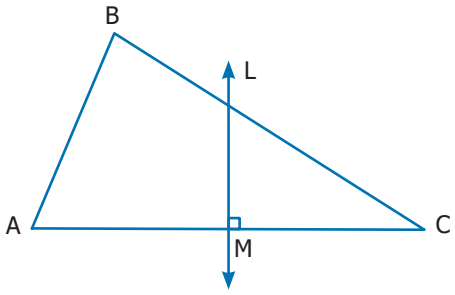
$m\angle AEC = \frac{\hat{B}}{2}$



E: Excentro

$m\angle BEC = 90 - \frac{\hat{A}}{2}$

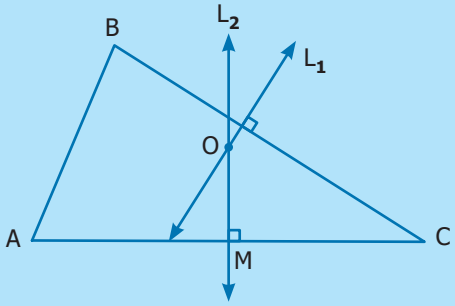
- Mediatriz



$AM = MC$

L: Mediatriz respecto a el lado $\overline{AC}$

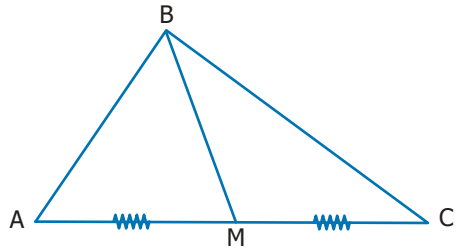
Observación:



L_1 y L_2 mediatrices

O: Circuncentro del $\triangle ABC$

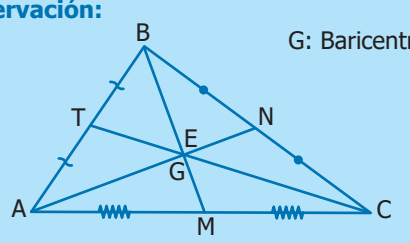
- Mediana



Si AM = MC

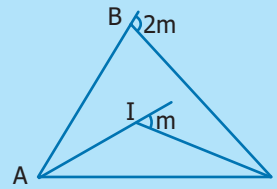
⇒ $\overline{BM}$: mediana

Observación:

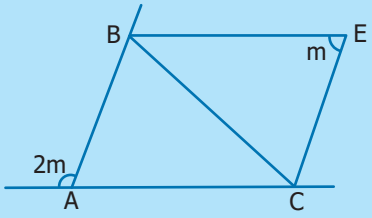


Se cumple: BG = 2GM
AG = 2GN
CG = 2GT

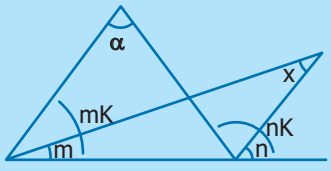
Observación:



I: Incentro del △ABC



E: Excentro del △ABC

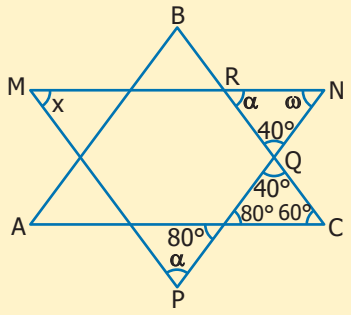


$x = \frac{\alpha}{K}$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

En el gráfico AB = BC = AC, calcula "x".



SAN MARCOS 1996
NIVEL DIFÍCIL

Resolución:

- Del dato se observa que el △ABC es equilátero.
- m∠PQC = 40°
- Sea m∠MNP = ω

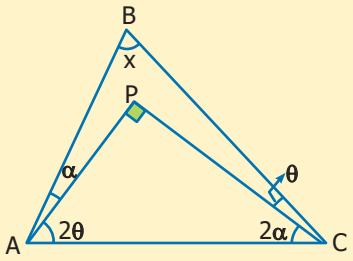
⇒ △RQN : α + ω + 40° = 180°
α + ω = 140°

- △MNP: x + w + a = 180
→ x + 140° = 180°
x = 40°

Respuesta: 40°

Problema 2

En la siguiente figura, calcula "x".



SAN MARCOS 1998
NIVEL FÁCIL

Resolución:

- Del gráfico se observa:

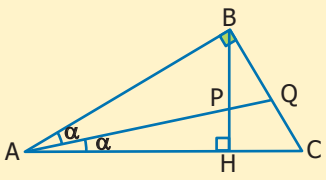
APC: 2θ + 2α = 90°
θ + α = 45°

- En la figura ABCP:
α + x + θ = 90°
α + θ + x = 90°
45° + x = 90°
x = 45°

Respuesta: 45°

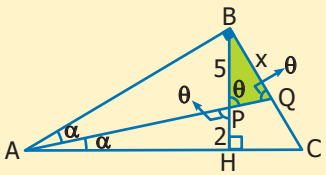
Problema 3

Calcular "BQ", si PH = 2u y BH = 7u.



A) 2 u B) 5 u C) 6 u
D) 3 u E) 4 u

Resolución:



- Sea m∠APH = θ = m∠BPQ
⇒ m∠BQA = θ
- El triángulo PBQ (isósceles)
BP = BQ
∴ x = 5u

Respuesta: 5u

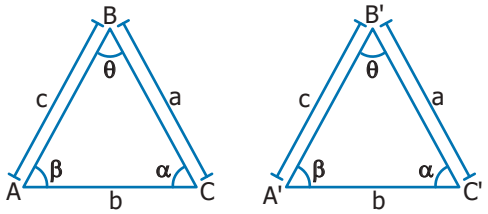
Pamer ACADEMIAS

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

DESARROLLO DEL TEMA

I. DEFINICIÓN

Son dos triángulos cuyos ángulos son respectivamente de igual medida y, además, sus lados correspondientes de igual longitud (ángulos y lados homólogos).



Entonces:

$m\angle ABC = m\angle A'B'C'$
$m\angle BAC = m\angle B'A'C'$ y $AB = A'B'$, $AC = A'C'$
$m\angle ACB = m\angle A'C'B'$ $CA = C'A'$

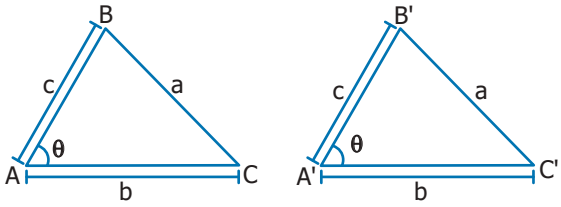
II. CASOS DE CONGRUENCIA

Para poder afirmar que dos triángulos son congruentes, es necesario que tres elementos en uno de ellos sean de igual medida que los tres elementos correspondientes en el otro triángulo, de los que, por lo menos uno, debe ser un lado.

Los casos más comunes son:

A. Lado-Ángulo-Lado (L. A. L.)

Dos triángulos son congruentes si tienen un ángulo interior de igual medida y, ademas, los lados que determinan a dichos ángulos son, respectivamente, de igual longitud.

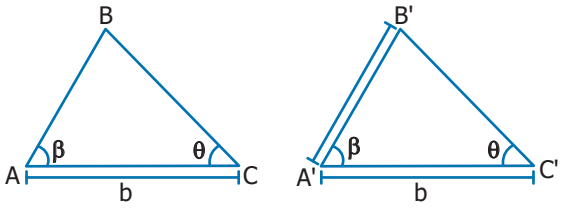


Si $m\angle BAC = m\angle B'A'C'$
$AB = A'B'$, $AC = A'C'$
$\rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

Nota:
Para la congruencia de dos triángulos, existen siempre tres condiciones. De estas nunca debe faltar un par de lados correspondientes congruentes.
Solo cuando se demuestra que dos triángulos son congruentes, se puede afirmar que a los lados congruentes se oponen ángulos congruentes y viceversa.

B. Ángulo-lado-ángulo (A. L. A.)

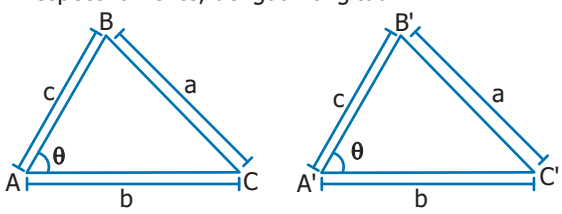
Dos triángulos son congruentes si tienen un lado de igual longitud y, además, los ángulos adyacentes a dichos lados son, respectivamente, de igual medida.



Si $AC = A'C'$
$m\angle BAC = m\angle B'A'C'$
$m\angle ACB = m\angle A'C'B'$
$\rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

C. Lado-lado-lado (L. L. L.)

Dos triángulos son congruentes si sus lados son, respectivamente, de igual longitud.



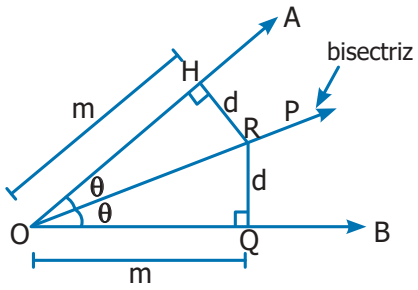
Si $AB = A'B'$
$BC = B'C'$
$AC = A'C'$

$\rightarrow \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

III. APLICACIONES DE LA CONGRUENCIA

A. Teorema de la bisectriz

Todo punto que pertenece a la bisectriz de un ángulo equidista de los lados de dicho ángulo.



Sea: $\overrightarrow{OP}$ Bisectriz del $\angle AOB$

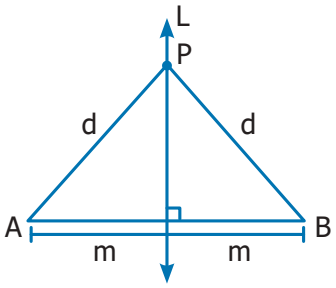
Si: $R \in \overrightarrow{OP}$, $\overline{RH} \perp \overrightarrow{OA}$ y $\overline{RQ} \perp \overrightarrow{OB}$

$\rightarrow RH = RQ$

Además: $OH = OQ$

B. Teorema de la mediatriz

Todo punto de la mediatriz de un segmento equidista de los extremos de dicho segmento.

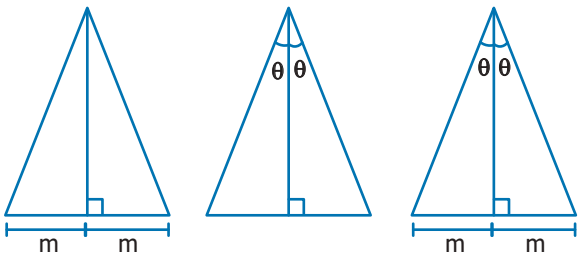


Sea: $\overrightarrow{L}$ mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

Si: $P \in \overrightarrow{L}$

$\rightarrow$ $\boxed{PA = PB}$

- **Observación:**
  Los siguientes triángulos son isósceles.

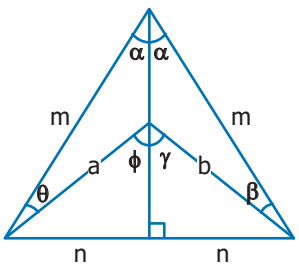


- **Consecuencia:**

$\rightarrow$ $\boxed{\theta = \beta}$

$\boxed{a = b}$

$\boxed{\gamma = \phi}$



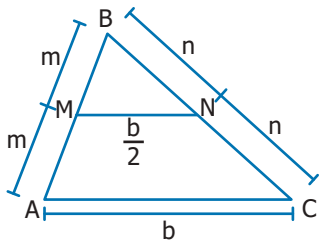
IV. BASE MEDIA DE UN TRIÁNGULO

Definición

Es el segmento que tiene por extremos, los puntos medios de dos lados de un triángulo.

1. Teorema de la base media

En todo triángulo, una base media es paralela a la base y su longitud es la mitad de la longitud de dicha base.



En la figura si: $AM = MB$ y $BN = NC$

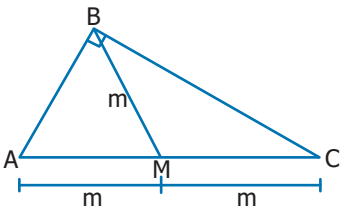
$\overline{MN}$: base media

Entonces:

$\boxed{\overline{MN} \parallel \overline{AC}}$ y $\boxed{MN = \frac{AC}{2}}$

2. Teorema de la mediana relativa a la hipotenusa

En todo triángulo rectángulo la longitud de la mediana relativa a la hipotenusa es igual a la mitad de la longitud de dicha hipotenusa.



En la figura

$\overline{BM}$: mediana relativa a la hipotenusa $\overline{AC}$ del $\triangle ABC$.

Entonces:

$\boxed{BM = \frac{AC}{2}}$

Observación:

Dos triángulos rectángulos serán congruentes, cuando tengan dos elementos básicos congruentes, estos dos elementos son suficientes ya que siempre existirá el ángulo recto.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

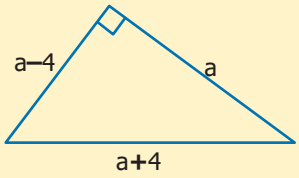
Hallar la hipotenusa de un triángulo rectángulo sabiendo que sus lados forman una progresión aritmética de razón 4 u.

A) 30 u B) 25 u C) 32 u
D) 20 u E) 41 u

UNMSM 1998

NIVEL FÁCIL

Resolución:



Planteamiento: Piden a + 4

Análisis de los datos:

Del gráfico:

$(a-4)^2+a^2=(a+4)^2$

$a^2 = (a+4)^2-(a-4)^2$

$a^2 = 4(a)(4)$

$a = 16$

$\therefore a + 4 = 16 + 4$

$= 20u$

Respuesta: 20 u

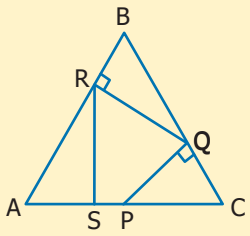
Problema 2

El △ABC es equilátero. Hallar RS si: AP = PC = $8\sqrt{3}$m.

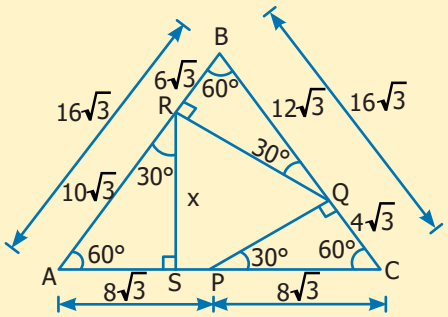
A) 10 m B) 13 m C) 15 m
D) 12 m E) 14 m

UNMSM 2000

NIVEL DIFÍCIL



Resolución:



Planteamiento: Piden RS = x

Análisis de los datos:

AP = PC = $8\sqrt{3}$ → AB = BC = AC = $16\sqrt{3}$

En ◺ PQC (30° y 60°) → QC = $4\sqrt{3}$

En ◺ RBQ (30° y 60°) → RB = $6\sqrt{3}$

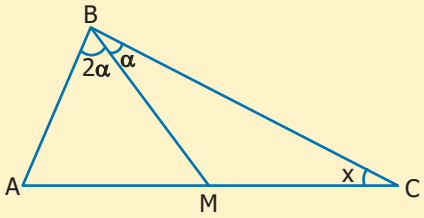
En ◺ ARS (30° y 60°) → AS = $5\sqrt{3}$

$\therefore x = 5\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\right)$ x = 15m

Respuesta: 15 m

Problema 3

Si AB = BM y AM = MC. Hallar x.

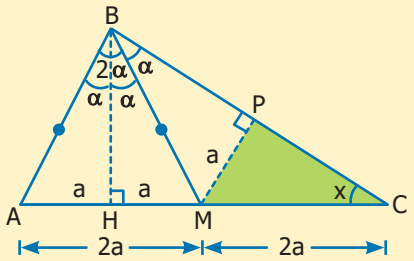


A) 20° B) 15°
C) 25° D) 10°
E) 30°

UNMSM 2003

NIVEL INTERMEDIO

Resolución:



Planteamiento: x

Análisis de los datos:

△ABM (isósceles)

AH=HM=a → m∠ABH=m∠HBM=α

Entonces: AM = MC = 2a

Trazamos: $\overline{MP} \perp \overline{BC}$

Por el teorema de la bisectriz: MH = PM = a

∴◺MPC(not 30° y 60°)

x = 30°

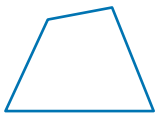
Respuesta: 30°

CUADRILÁTEROS Y POLÍGONOS

DESARROLLO DEL TEMA

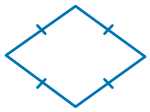
POLÍGONOS

Convexos

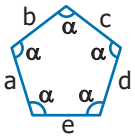


No convexos

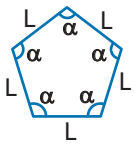
Equiláteros



Equiángulos



Regulares



$$\#D = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$s\sphericalangle i = 180°(n-2)$$

$$\sphericalangle i = \frac{180°(n-2)}{n}$$

$$s\sphericalangle e = 360°$$

$$\sphericalangle e = \frac{360°}{n}$$

$$\sphericalangle c = \frac{360°}{n}$$

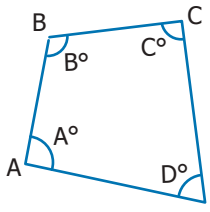
$$\#Dm = \frac{n(n-1)}{2}$$

#Dm = Número de diagonales medias

CUADRILÁTEROS

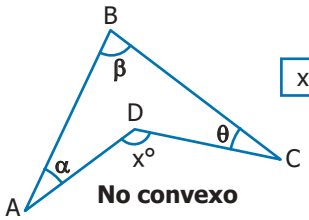
I. DEFINICIÓN

Son aquellas figuras determinadas al trazar cuatro rectas secantes y coplanares, que se intersectan dos a dos. Los segmentos que se determinan son sus lados y los puntos de intersección son sus vértices.



Convexo

$$A°+B°+C°+D° = 360°$$



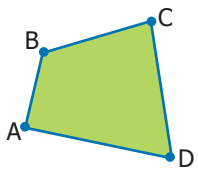
No convexo

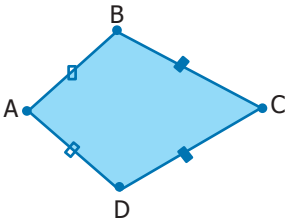
$$x° = \alpha°+\beta°+\theta°$$

II. CLASIFICACIÓN

A. Trapezoides

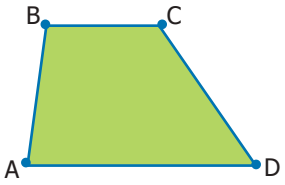
Trapezoide asimétrico



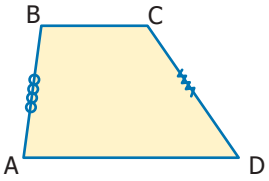


Trapezoide simétrico

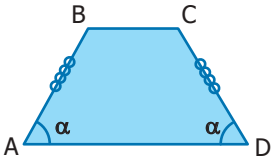
B. Trapecios



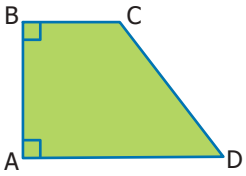
$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$
Bases



T. Escaleno

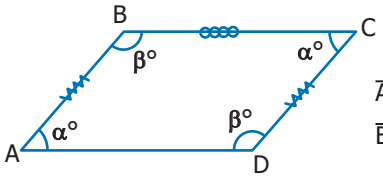


T. Isósceles

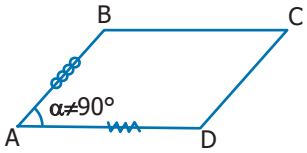


T. Rectángulo

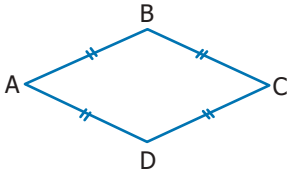
C. Paralelogramos



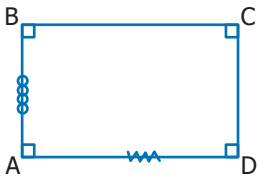
$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$



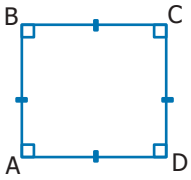
Romboide



Rombo



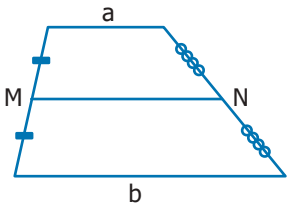
Rectángulo



Cuadrado

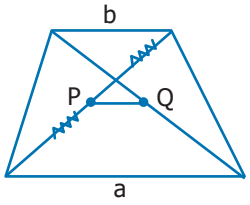
III. PROPIEDADES BÁSICAS

A. En el Trapecio



$\overline{MN}$: Base media
$\overline{MN} \parallel$ Bases

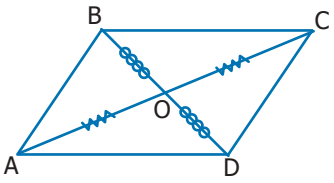
$$MN = \frac{a+b}{2}$$



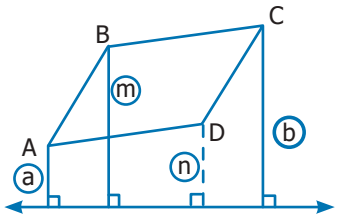
$\overline{PQ} \parallel$ Bases

$$PQ = \frac{a-b}{2}$$

B. En el Paralelogramo

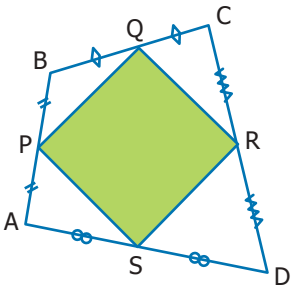


AO = OC
BO = OD



a+b = n+m

C. En todo Cuadrilátero



→ PQRS es un paralelogramo

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

La relación entre las medidas del ángulo interior y exterior de un polígono regular es 3/2. Calcular su número de diagonales.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución:

Dato: $\frac{\hat{i}}{\hat{e}} = \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\frac{180(n-2)}{n}}{\frac{360}{n}} = \frac{3}{2}$$

$$D_1 = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{5(5-3)}{2}$$

Piden: $D_1 = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{5(5-3)}{2}$

$D_T = 5$

Respuesta: DT = 5

Problema 2

En un polígono convexo, desde 3 vértices consecutivos se han trazado 8 diagonales. Calcular la suma de los ángulos internos de dicho polígono.

A) 700° B) 710° C) 720°
D) 730° E) 740°

Resolución:

1.er vértice: n – 3
2.do vértice: n – 3
3.er vértice: n – 4
En total: 3n – 10 = 8
3n = 18
n = 6
Piden: $S_i = 180(6-2)$
$S_i = 720°$

Respuesta: S_i = 720°

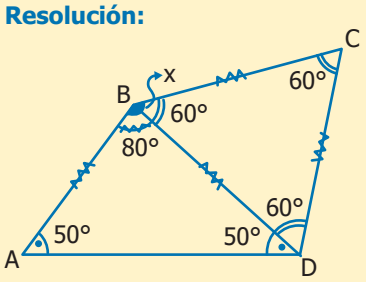
Problema 3

En un trapezoide ABCD, se cumple: AB = BC = CD; calcula m∠ABC si m∠BCD = 60° y m∠BAD = 50°.

UNMSM 1998
NIVEL FÁCIL

A) x = 160° B) x = 140°
C) x = 120° D) x = 100°
E) x = 90°

Resolución:



Piden: m∠B = x
Unimos BD para que el ΔBCD sea equilátero, por lo que m∠CBD es 60°.
El ΔABD es isósceles (AB = BD).

Entonces m∠ABD es 80°
m∠B = m∠ABD + m∠CBD
x = 80° + 60°
x = 140°

Respuesta: x = 140°

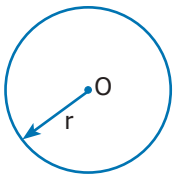
CIRCUNFERENCIA I

DESARROLLO DEL TEMA

I. DEFINICIÓN

Es aquella figura geométrica formada por todos los puntos de un plano que equidistan de un punto fijo del mismo plano llamado centro.

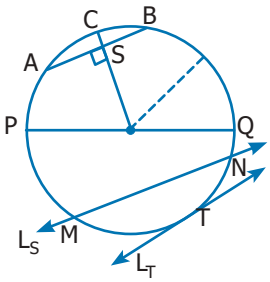
II. ELEMENTOS



Centro : O
Radio : r

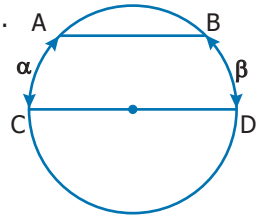
Nota:
Medida Angular: 360°
Medida Longitudinal: $2\pi r$

III. ELEMENTOS ASOCIADOS A LA CIRCUNFERENCIA



- Cuerda: $\overline{AB}$
- Diámetro: $\overline{PQ}$
  $PQ = 2r$
- Arco $\overset{\frown}{AB}$
- Punto de Tangencia: T
- Recta Tangente: L_T
- Recta Secante: L_S
- Flecha: $\overline{CS}$

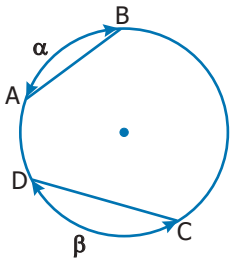
IV. PROPIEDADES FUNDAMENTALES

1. 

Si: $\overline{AB} // \overline{CD}$ se cumple:

$m\overset{\frown}{AC} = m\overset{\frown}{BD}$

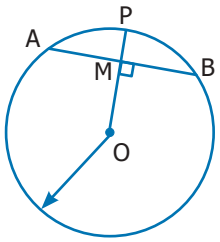
$\boxed{\alpha = \beta}$

2. 

Si: AB = CD se cumple:

$m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{CD}$

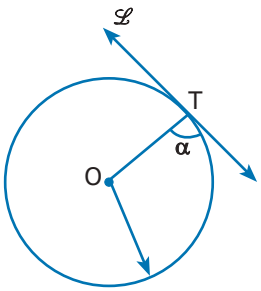
$\boxed{\alpha = \beta}$

3. 

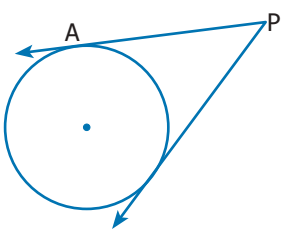
Si: $\overline{OP} \perp \overline{AB}$ se cumple:

AM = MB

$m\overset{\frown}{AP} = m\overset{\frown}{PB}$

4. 

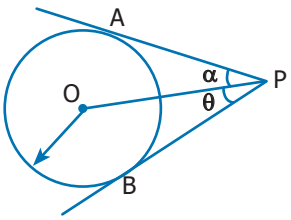
Si: $\overleftrightarrow{\mathscr{L}}$ recta tangente se cumple:

5. 

Si: A, B son puntos de tangencia, se cumple:

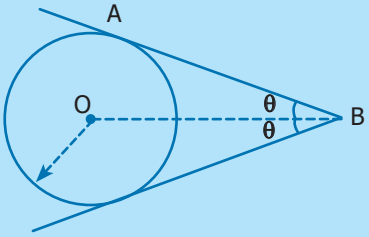
AP = PB

6.



Si: $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ y son puntos de tangencia

Nota:
Si te piden el inradio de un triángulo rectángulo será necesario aplicar el teorema de Poncelet.
Si se tiene el gráfico.

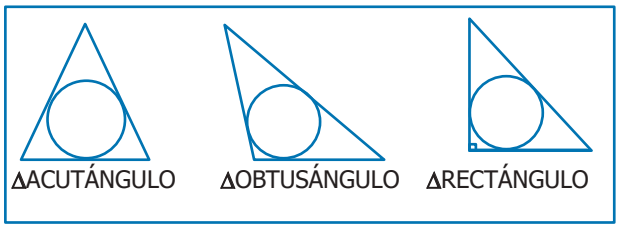


y se tiene m∢ABC es conveniente trazar

V. CIRCUNFERENCIA INSCRITA EN UN TRIÁNGULO

Es aquella circunferencia que es tangente a los lados de un triángulo.

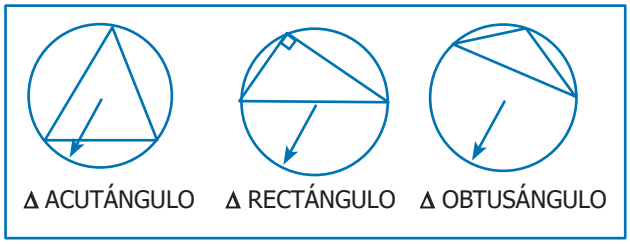
Nota:
Todo triángulo tiene una circunferencia inscrita a su centro, se denomina incentro y se determina al intersectarse las bisectrices interiores, además el radio se denomina inradio.



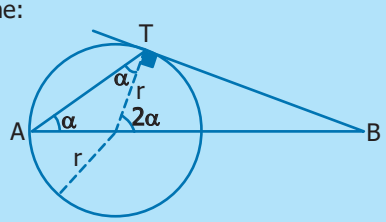
VI. CIRCUNFERENCIA CIRCUNSCRITA A UN TRIÁNGULO

Es aquella circunferencia que contiene a los vértices de un triángulo.

Nota:
Todo triángulo tiene una circunferencia circunscrita cuyo centro se denomina circuncentro y se determina al intersectar las mediatrices trazadas a cada lado del triángulo y cuyo radio se llama circunradio.



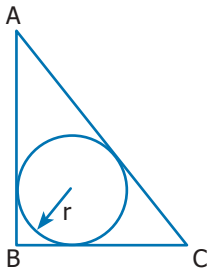
Nota:
Se tiene:



Se traza

VII. TEOREMA DE PONCELET

En todo triángulo rectángulo la suma de los catetos es igual a la longitud de la hipotenusa más dos veces el inradio.



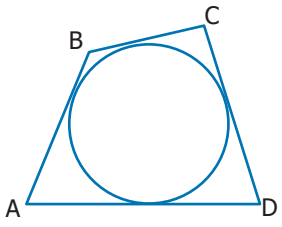
$AB + BC = AC + 2r$

* r inradio del

△ ABC

VIII. TEOREMA DE PITOT

En todo cuadrilátero convexo circunscrito a una circunferencia la suma de los lados opuestos son iguales.



$AB + CD = BC + AD$

Nota:
El teorema de Pitot se puede aplicar en cualquier polígono convexo cuyo número de lados sea par.

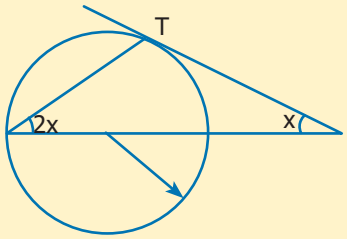
Si dos cuerdas son congruentes, entonces la distancia del centro en dichas cuerdas son congruentes.

Los únicos paralelogramos que se puedan inscribir en una circunferencia son el rectángulo y el cuadrado.

PROBLEMAS RESUELTOS

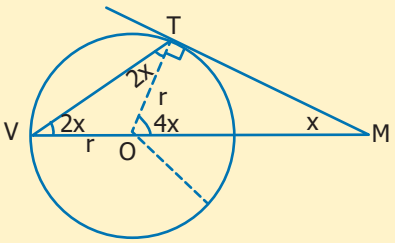
Problema 1

Calcula: "x". (T: punto de tangencia)



A) 18° B) 14° C) 16°
D) 12° E) 13°

Resolución:



Piden: x

ΔVOT ($m\sphericalangle VTO = 2x$)

$m\sphericalangle TOM = 4x$

$\triangle OTM$

$4x + x = 90^o$

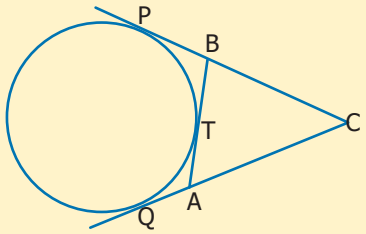
$5x = 90^o$

$x = 18^o$

Respuesta: 18°

Problema 2

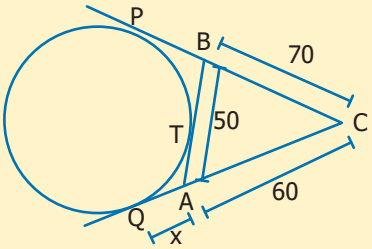
En el gráfico, si AB = 50, BC = 70 y AC = 60. Calcula AQ. (P, Q y T son puntos de tangencia)



A) 28 B) 20 C) 30
D) 22 E) 23

Resolución:

Piden: AQ = x



Por propiedad:

$CQ = CP = p\Delta ABC = \dfrac{50 + 60 + 70}{2}$

$CQ = CP = 90$

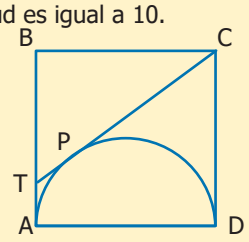
$\Rightarrow 60 + x = 90$

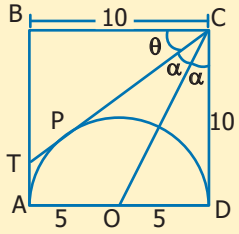
$x = 30$

Respuesta: 30

Problema 3

Calcula el perímetro del triángulo BTC si el cuadrado ABCD tiene un lado cuya longitud es igual a 10.





A) 28 B) 20 C) 35
D) 30 E) 23

Resolución:

Piden: $2p\Delta BTC$

$\triangle ODC$ (Not. $\dfrac{53^o}{2}$)

$\alpha = \dfrac{53^o}{2}$

$\Rightarrow \theta = 37^o$

$\triangle TBC$ (Not. 37° y 53°)

$2p\Delta TBC = 30$

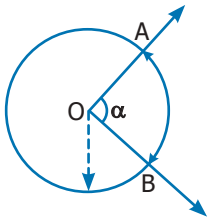
Respuesta: 30

CIRCUNFERENCIA II

DESARROLLO DEL TEMA

I. ÁNGULOS ASOCIADOS A LA CIRCUNFERENCIA

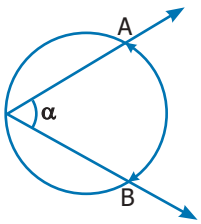
A. Ángulo Central



Del gráfico se cumple:

$$m\overset{\frown}{AB} = \alpha$$

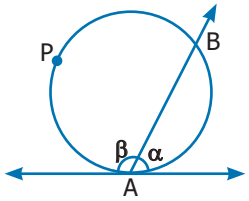
B. Ángulo Inscrito



Del gráfico se cumple:

$$m\overset{\frown}{AB} = 2\alpha$$

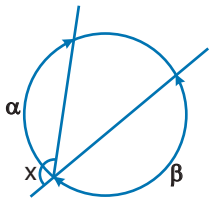
C. Ángulo Semi–inscrito



Del gráfico se cumple:

$$m\overset{\frown}{AB} = 2\alpha$$
$$m\overset{\frown}{APB} = 2\beta$$

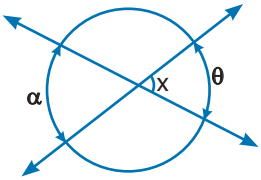
D. Ángulo Ex–inscrito



Del gráfico se cumple:

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

E. Ángulo Interior

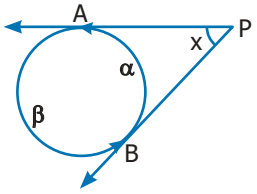


Del gráfico se cumple:

$$x = \frac{\alpha + \theta}{2}$$

F. Ángulo Exterior

Caso 1

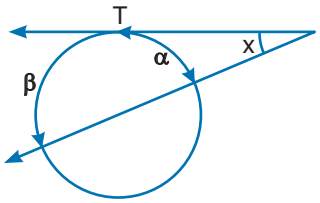


Del gráfico A y B son puntos de tangencia

$$x = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

$$x + \alpha = 180°$$

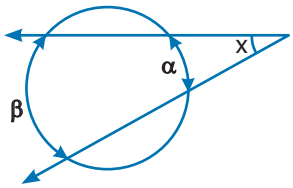
Caso 2



Del gráfico T es punto de tangencia

$$x = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

Caso 3

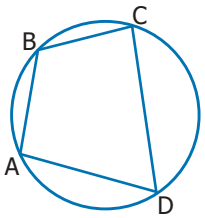


En el gráfico:

$$x = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

II. CUADRILÁTERO INSCRITO EN UNA CIRCUNFERENCIA

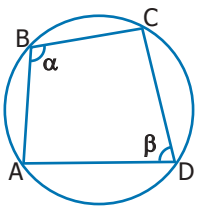
Es aquel cuadrilátero cuyos vértices pertenecen a una misma circunferencia.



ABCD: Cuadrilátero Inscrito o Cíclico

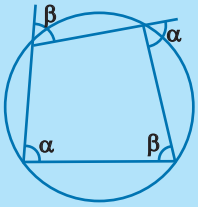
III. PROPIEDADES

En todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia, los ángulos opuestos son suplementarios.



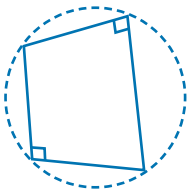
$$\alpha + \beta = 180°$$

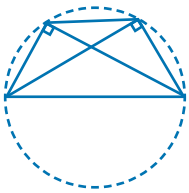
Nota:



IV. CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE

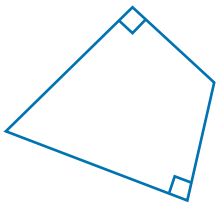
Es aquel cuadrilátero que se puede inscribir en una circunferencia, por lo cual, deberá cumplir con las propiedades anteriores.



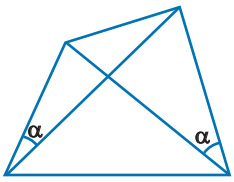


Un cuadrilátero va a ser inscriptible si se cumple:

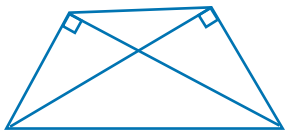
1.



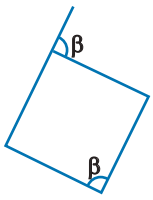
2.



3.



4.



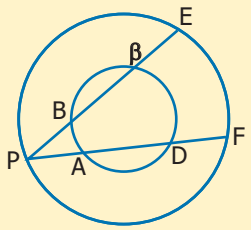
Nota:

La medida longitudinal y la medida angular de una circunferencia de radio "r" es $2\pi r$ y $360°$ respectivamente.

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Si: $m\overset{\frown}{AB} = \frac{m\overset{\frown}{CD}}{4}$, calcula $m\overset{\frown}{EF}$



A) $m\overset{\frown}{EF} = 20°$ B) $m\overset{\frown}{EF} = 60°$
C) $m\overset{\frown}{EF} = 80°$ D) $m\overset{\frown}{EF} = 30°$
E) $m\overset{\frown}{EF} = 10°$

UNMSM 1997
NIVEL FÁCIL

Resolución:

De los datos y el gráfico:

$m\overset{\frown}{AB} = 20°$; $m\overset{\frown}{CD} = 80°$

En la circunferencia menor:

$$m\hat{P} = \frac{m\overset{\frown}{CD} - m\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{80° - 20°}{2}$$

$m\hat{P} = 30°$

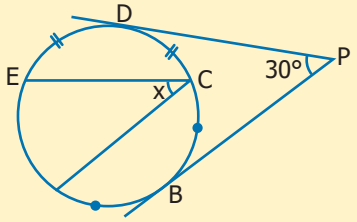
En la circunferencia mayor, por ser ángulo inscrito:

$$\frac{m\overset{\frown}{EF}}{2} = m\hat{P} \Rightarrow \boxed{m\overset{\frown}{EF} = 60°}$$

Respuesta: $m\overset{\frown}{EF} = 60°$

Problema 2

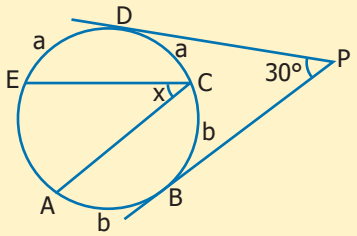
En el gráfico, calcula x.



A) 28º B) 30º C) 10º
D) 22º E) 23º

UNMSM 1993
NIVEL INTERMEDIO

Resolución:



Del gráfico:
$30º + a + b = 180º$
$a + b = 150º$

En la circunferencia:
$m\overset{\frown}{EA} + 2a + 2b = 360º$
$m\overset{\frown}{EA} + 300º = 360º \Rightarrow m\overset{\frown}{EA} = 60º$

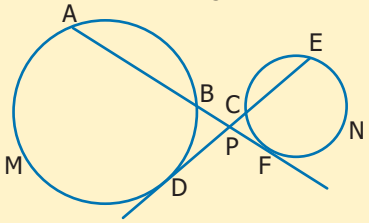
$$x = \frac{m\overset{\frown}{EA}}{2}$$

Por ángulo inscrito:
$x = 30°$

Respuesta: 30º

Problema 3

En el gráfico, calcula: $m\overset{\frown}{BD} - m\overset{\frown}{CF}$,
si: $m\overset{\frown}{AMD} - m\overset{\frown}{ENF} = 15°$



UNMSM 1996
NIVEL DIFÍCIL

A) 18º B) 30º C) 15º
D) 12º E) 20º

Resolución:

$$\hat{P} = \frac{m\overset{\frown}{AMD} - m\overset{\frown}{BD}}{2}$$

Del gráfico:

$$\hat{P} = \frac{m\overset{\frown}{ENF} - m\overset{\frown}{CF}}{2}$$

Luego:

$$\frac{m\overset{\frown}{ENF} - m\overset{\frown}{CF}}{2} = \frac{m\overset{\frown}{AMD} - m\overset{\frown}{BD}}{2}$$

$m\overset{\frown}{BD} - m\overset{\frown}{CF} - m\overset{\frown}{AMD} - m\overset{\frown}{ENF}$

$m\overset{\frown}{BD} - m\overset{\frown}{CF} = 15°$

Respuesta: 15º

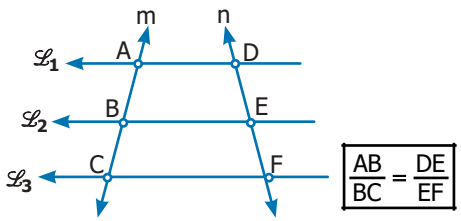
PROPORCIONALIDAD Y SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

DESARROLLO DEL TEMA

I. TEOREMA DE THALES

"Tres o más paralelas determinan sobre dos o más secantes segmentos proporcionales".

Las rectas $\mathscr{L}_1$, $\mathscr{L}_2$ y $\mathscr{L}_3$ son paralelas y las rectas m y n son secantes, luego se cumple:



$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

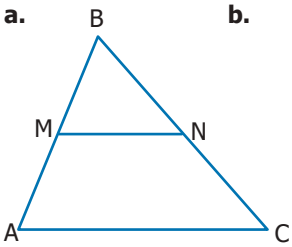
Corolario

"Toda paralela a un lado de un triángulo que interseca a los otros dos o a sus prolongaciones, determinan sobre ellas segmentos proporcionales".

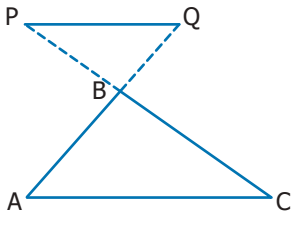
De (a):

$$\overline{MN} \,//\, \overline{AC} \Rightarrow \frac{BM}{MA} = \frac{BN}{NC}$$; De (b): $$\overline{PQ} \,//\, \overline{AC} \Rightarrow \frac{PB}{BC} = \frac{QB}{BA}$$

a.



b.



"En todo triángulo se cumple que los lados que forman el vértice de donde parte la bisectriz interior (exterior) son proporcionales a los segmentos determinados por dicha bisectriz sobre el lado opuesto".

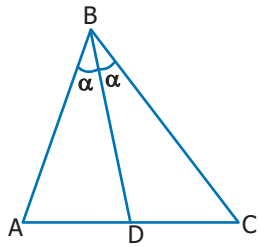
En la figura a), $\overline{BD}$ es bisectriz interior, luego se cumple que:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC}$$

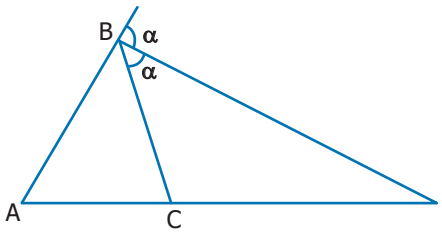
En la figura b), $\overline{BE}$ es bisectriz exterior, luego se cumple que:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{CE}$$

a.

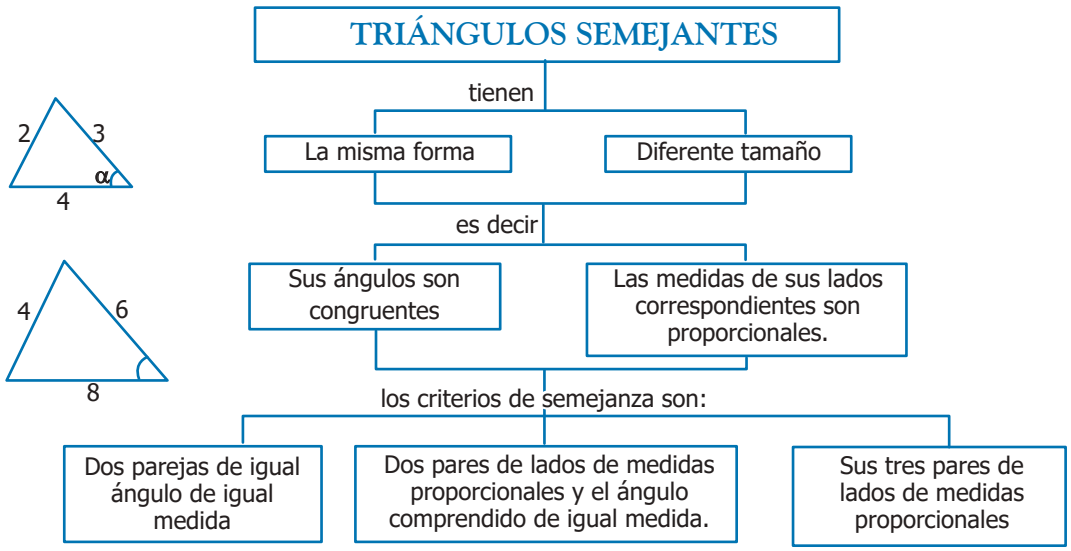


b.



Observación:

- El Teorema de Thales es un teorema unívoco, eso quiere decir que tiene que haber rectas paralelas para que haya segmentos proporcionales y no lo contrario.
- Tener en claro la teoría de razón y proporción geométrica, ya que en este capítulo se utilizará esos conceptos con relación a lados, segmentos, etc.
- Establecer la diferencia entre triángulos congruentes y semejantes.



II. DEFINICIÓN

Dos triángulos son semejantes si tienen sus tres ángulos congruentes, o, sus tres lados respectivamente proporcionales.

Según lo expuesto, si los triángulos ABC y MNP de la figura son semejantes, esto se denota así:

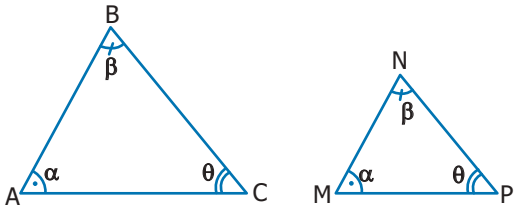
$$\Delta ABC \sim \Delta MNP$$

Se comprueba que sus ángulos son tales que:

$$m\angle A = m\angle M; m\angle B = m\angle N; m\angle C = m\angle P$$

En dos triángulos semejantes se verifica que la razón de cualquier pareja de lados homólogos (se denominan lados homólogos a aquellos que perteneciendo a dos triángulos semejantes se oponen a ángulos congruentes), es un número constante, llamado razón de semejanza.

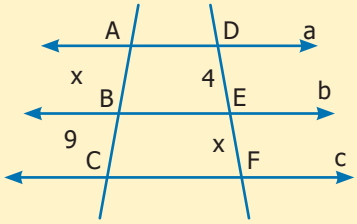
$$\boxed{\frac{AB}{MN}=\frac{BC}{NP}=\frac{AC}{MP}=k}$$, donde k es la razón de semejanza.



PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

En la figura, calcular "x", si $\overleftrightarrow{a} // \overleftrightarrow{b} // \overleftrightarrow{c}$.



UNMSM 1990
NIVEL FÁCIL

A) 18 B) 6 C) 10
D) 12 E) 13

Resolución:

Si a//b//c, por el teorema de Thales se cumple:

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$$

Reemplazando los datos:

$$\frac{x}{9}=\frac{x}{4}$$

$$\therefore \quad x = 6$$

Respuesta: 6

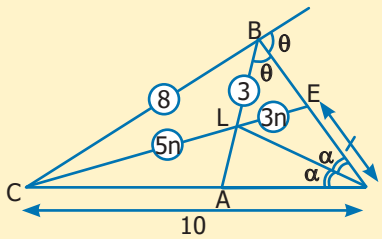
Problema 2

En un triángulo ABC, se traza la bisectriz exterior BP(P en la prolongación de $\overline{CA}$), en el triángulo PAB se traza la bisectriz interior PL, tal que la prolongación de $\overline{CL}$ interseca a $\overline{PB}$ en E. Calcular PE, si BL = 3, PC = 10 y BC = 8.

UNMSM 1992
NIVEL INTERMEDIO

A) 18 B) 6 C) 10
D) 12 E) 13

Resolución:



En la figura nos piden PE = x, en ΔCBL, por teorema de la bisectriz exterior tenemos:

$$\frac{CE}{EL}=\frac{8}{3} \rightarrow \begin{matrix} CE = 8n \\ EL = 3n \end{matrix}$$

Entonces CL = 5n, luego en el , por el teorema de la bisectriz interior tenemos:

$$\frac{x}{3n} = \frac{10}{5n}$$

$$\therefore x = 6$$

Respuesta: 6

Problema 3

En un ΔABC(BC = BC), las alturas BH y AQ se intersectan en "O", tal que: OH = 1 y OB = 8.

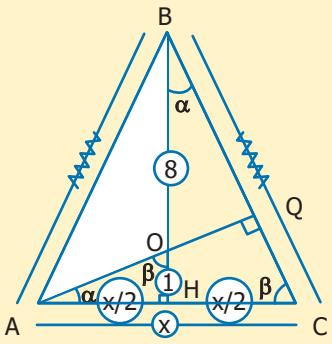
Calcular AC.

UNMSM 2002

NIVEL DIFÍCIL

A) 18 B) 6 C) 10
D) 12 E) 13

Resolución:



En la figura nos pide: AC = x

Si el ΔABC es isósceles y $\overline{BH}$ es altura:

$$AH = HC = \frac{x}{2}$$

Y como: $m\sphericalangle OAH = m\sphericalangle OBQ = \alpha$

Resulta que:

$$\triangle BHC \sim \triangle AHO$$

$$\frac{x/2}{9} = \frac{1}{x/2}$$

$$\therefore x = 6$$

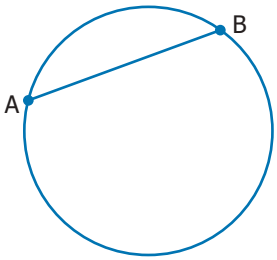
Respuesta: 6

RELACIONES MÉTRICAS EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO Y LA CIRCUNFERENCIA

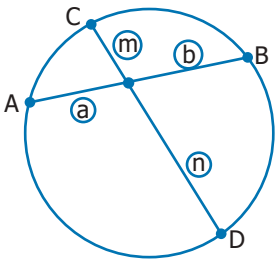
DESARROLLO DEL TEMA

I. TEOREMA DE LAS CUERDAS

¿Qué es cuerda?



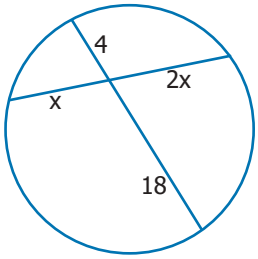
$\overline{AB}$: Es cuerda (segmento que une 2 puntos de la circunferencia).



$\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son cuerdas:

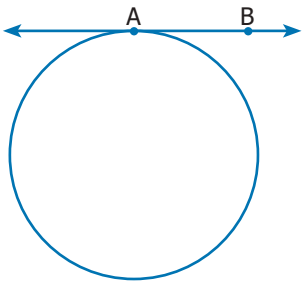
$$a \cdot b = m \cdot n$$

Ejemplo:
Hallar "x"

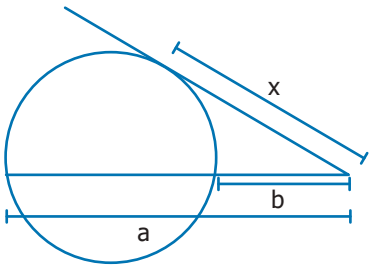


II. TEOREMA DE LA TANGENTE

¿Qué es una tangente?



$\overline{AB}$: es tangente. (Recta que interseca a la circunferencia en un solo punto).

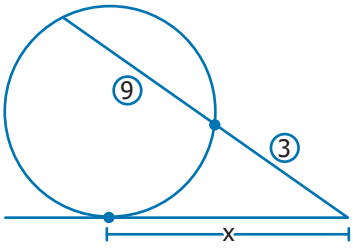


$$x^2 = a \cdot b$$

x: Tangente
a: Secante
b: Parte externa de la secante

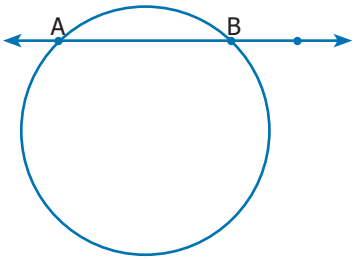
Ejemplo:

Hallar "x".

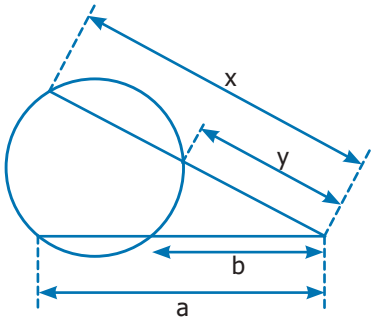


III. TEOREMAS DE LAS SECANTES

¿Qué es una secante?



$\overline{AB}$: es una secante (recta que intersecta a la circunferencia en 2 puntos)



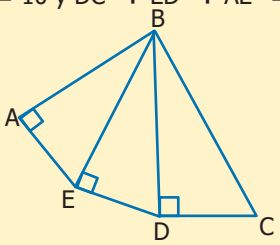
$x \cdot y = a \cdot b$

a , x : Secante
b , y : Partes externas de las secantes

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Calcula AB.
Si $BC = 10$ y $DC^2 + ED^2 + AE^2 = 56$



UNMSM 2002
NIVEL FÁCIL

A) $3\sqrt{20}$ B) $2\sqrt{11}$ C) $2\sqrt{10}$
D) $5\sqrt{10}$ E) $2\sqrt{20}$

Resolución:

Utilizando el teorema de Pitágoras, tenemos:

$\triangle BDC$: $BC^2 = DC^2 + BD^2$ ..... (I)

$\triangle BED$: $BD^2 = ED^2 + BE^2$ ..... (II)

$\triangle BAE$: $BE^2 = AE^2 + AB^2$ ..... (III)

Sumando (I), (II) y (III) obtenemos:
$BC^2 = DC^2 + ED^2 + AE^2 + AB^2$
$10^2 = 56 + AB^2$
$44 = AB^2$

$AB = 2\sqrt{11}$

Respuesta: B) $2\sqrt{11}$

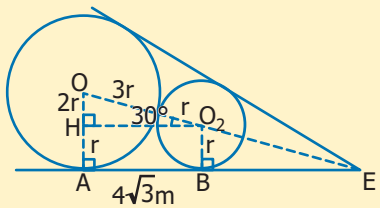
Problema 2

Los radios de dos circunferencias tangentes externas están en la relación de uno a tres. Las tangentes comunes exteriores miden $4\sqrt{3}$ u y se cortan en E. Calcula la distancia entre el centro de la mayor y E.

UNMSM 2004
NIVEL INTERMEDIO

A) 12 m B) 10 m C) 11 m
D) 15 m E) 20 m

Resolución:



Se pide calcular OE

$AB = 2\sqrt{3r.r} \Rightarrow r = 2m$.

Unimos los centros con E.

Se observa que $OO_2 = 4r$; $OH = 2r$

$\Rightarrow m\angle OO_2H = 30 \Rightarrow m\angle OEA = 30°$

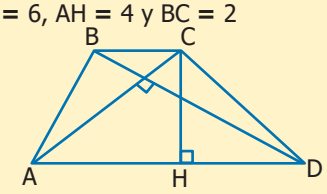
y ya que $r = 2$ u; $OA = 6$ u

En el $\triangle OAE$: $OE = 12$ m

Respuesta: A) 12m

Problema 3

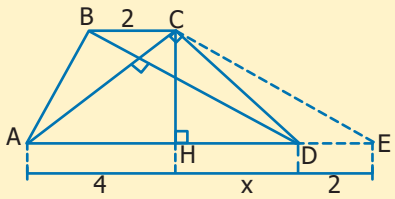
En el trapecio mostrado calcula HD si $AC = 6$, $AH = 4$ y $BC = 2$



UNMSM 2001
NIVEL DIFÍCIL

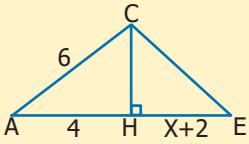
A) 12 B) 5 C) 3
D 15 E) 2

Resolución:



A partir del vértice C se traza una paralela a $\overline{BD}$.

- Donde DBCE es un paralelogramo
- En el $\triangle ACE$



$6^2 = 4(6 + x) \Rightarrow x = 3$

Respuesta: C) 3

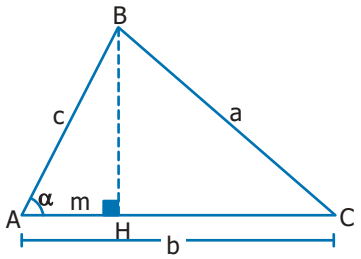
RELACIONES MÉTRICAS EN TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS Y CUADRILÁTEROS

DESARROLLO DEL TEMA

I. TEOREMA DE EUCLIDES

A. Teorema 1

En todo triángulo se cumple que la medida del lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los otros dos lados, menos el doble producto entre las medidas de uno de estos lados y la proyección del otro sobre él.



De acuerdo a la figura siendo $\alpha < 90$ y "m" la longitud de la proyección se cumple.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bm \quad \ldots (1)$$

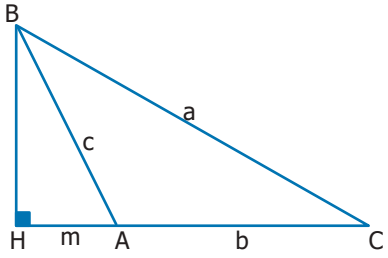
Observación

En el $\triangle$ AHB: $m = c\cos\alpha$

En (1): $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ Teorema de Cosenos.

B. Teorema 2

En todo triángulo obtusángulo se cumple que el cuadrado de la medida del lado, opuesto al ángulo obtuso es iguala a la suma de los cuadrados de las medidas de los otros dos lados más el doble producto entre las medidas de uno de estos lados y la proyección del otro sobre él.



En la figura: $\alpha > 90$ y $\overline{AH}$ es la proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$ ($AH = m$), luego:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bm \quad \ldots (2)$$

Observación

En el $\triangle$ AHB: $m = c\cos\alpha$.

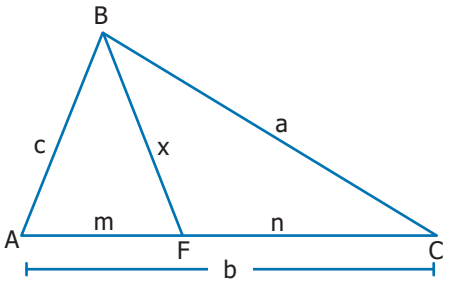
En (2) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ "Teorema de cosenos"

II. RECONOCIMIENTO DE LA NATURALEZA DE UN TRIÁNGULO

Dado el triángulo ABC, donde $AB = c$, $BC = a$ y $AC = b$, siendo $a > b > c$, entonces se verifica que:

$a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow$ el $\triangle$ABC es acutángulo
$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow$ el $\triangle$ABC es rectángulo
$a^2 > b^2 + c^2 \Rightarrow$ el $\triangle$ABC es obtusángulo

A. Teorema de Stewart



Si $\overline{BF}$ es una ceviana entonces se verifica la siguiente relación:

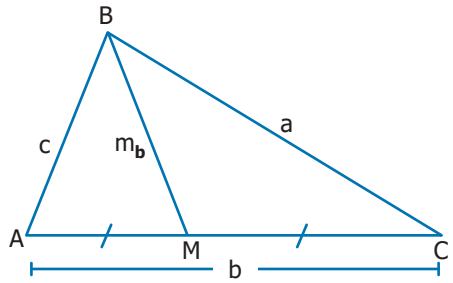
$$c^2n + a^2m = x^2b + bmn \quad (3)$$

Observación

Si el triángulo es isósceles con $a = c$ la expresión (3) se reduce a:

$$a^2 = x^2 + mn$$

B. Teorema de la mediana



Si BM es mediana ($BM = m_b$) se cumple lo siguiente:

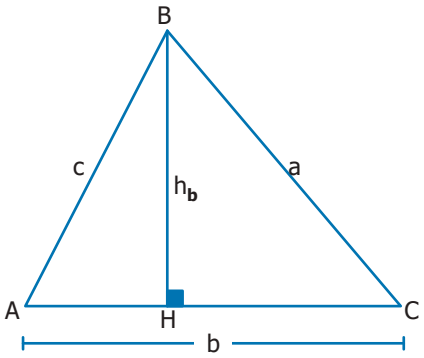
$$c^2 + a^2 = 2(m_b)^2 + \frac{b^2}{2}$$

Observación

Siendo las medidas de las otras medianas m_a y m_c se cumple que:

$$(m_a)^2 + (mb)^2 + (mc)^2 + = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

C. Teorema de Herón

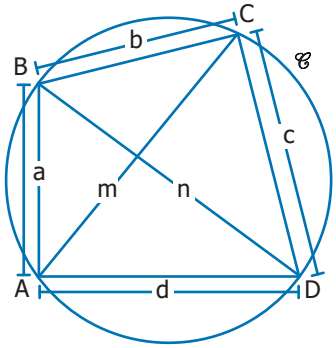


$\overline{BH}$ es altura ($BH = h_b$): $p = \frac{a + b + c}{2}$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

D. Teorema Ptolomeo

En todo cuadrilátero inscrito o inscriptible, el producto de las longitudes de sus diagonales es igual a la suma de los productos de las longitudes de sus lados opuestos.

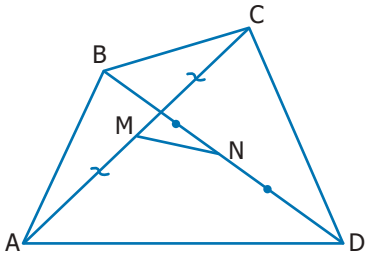


▱ ABCD: inscrito en la circunferencia $\mathscr{C}$.
$AB = a$; $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$
$AC = m$ y $BD = n$
Se cumple: $m \cdot n = a \cdot c + b \cdot d$

III. RELACIONES MÉTRICAS EN EL CUADRILÁTERO

A. Teorema de Euler

En todo cuadrilátero convexo o no convexo se verifica a la siguiente relación.

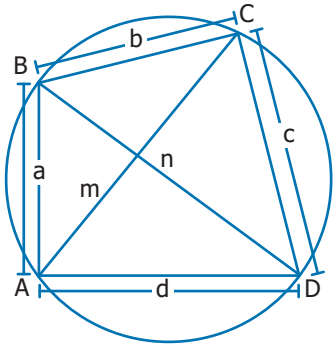


$$(AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2 + (AD)^2 = (AC)^2 + (BD)^2 + 4(MN)^2$$

B. Teorema de Viette

(Segundo Teorema de Ptolomeo)

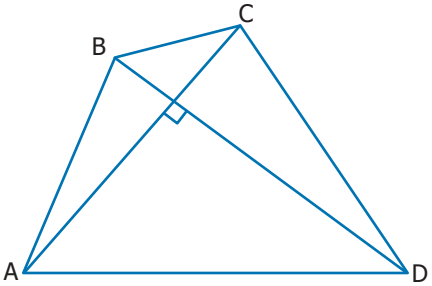
En todo cuadrilátero inscrito o inscriptible en una circunferencia, la razón de las longitudes diagonales es igual a la razón de la suma de los productos de las longitudes de los lados que ocurren a los extremos de cada diagonal respectivamente.



Se cumple: $\frac{m}{n} = \frac{ad + bc}{ab + cd}$

C. Teorema de Arquímedes

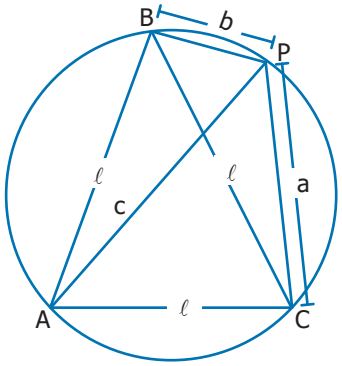
Es un cuadrilátero de diagonales perpendiculares se verifica que:



$$AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$$

D. Teorema de Chadú

En todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia o inscriptible, tal que tres vértices son los vértices de un triángulo equilátero, entonces la distancia del cuarto vértice más alejado es igual a la suma de las distancias de este a los otros dos vértices del triángulo equilátero.



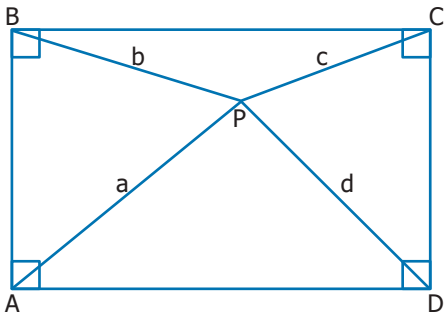
Se cumple: PA = PC + PB

→ $\boxed{C = a + b}$

E. Teorema de Marlen

Es un rectángulo, la suma de los cuadrados de las distancias de un punto cualquiera a sus vértices opuestos son iguales.

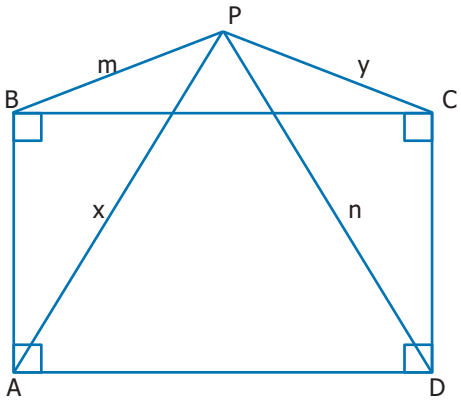
1.



P: punto interior del rectángulo ABCD.

Se cumple: $\boxed{a^2 + c^2 = b^2 + d^2}$

2.



P: es el punto exterior del rectángulo ABCD.
Se cumple:

$$\boxed{x^2 + y^2 = m^2 + n^2}$$

Observación:

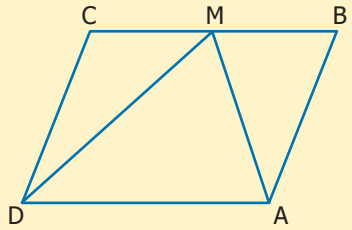
El teorema de Marlen también se puede aplicar aun cuadrado.

El punto P puede ubicarse en cualquier parte del plano que contiene al rectángulo, incluso el teorema se sigue cumpliendo si P está en el espacio (fuera del plano que contiene al rectángulo).

PROBLEMAS RESUELTOS

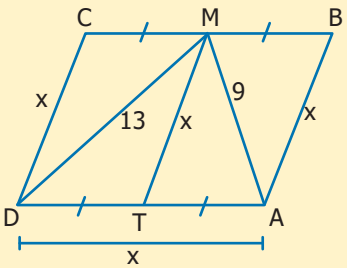
Problema 1

ABCD es un rombo, BM = MC, AM = 9 y DM = 13. Calcula AB.



A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

Resolución:



Calculo de la mediana:

$$13^2 + 9^2 = 2x^2 + \frac{x^2}{2}$$

x = 10

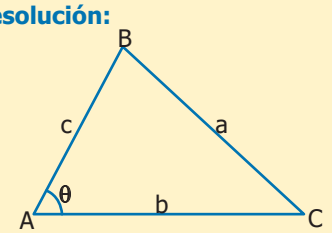
Respuesta: C) 10

Problema 2

En un triángulo ABC, AB = C; BC = a y AC = b. Si $a^2 = b^2 + c^2 - bc$.
Calcule la mediana de uno de los ángulos interiores.

A) 45° B) 53° C) 37°
D) 30° E) 60°

Resolución:



Teorema de cosenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bcCos\theta$$

Dato:

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc$$

$$\Rightarrow 2\cancel{bc}Cos\theta = \cancel{bc} \quad \therefore Cos\theta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = 60°$$

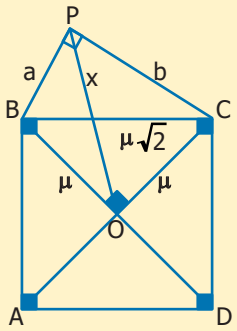
Respuesta: E) 60°

Problema 3

Es un cuadrado ABCD exterior y relativo a $\overline{BC}$ se ubica el punto P. Si $m\sphericalangle BPC = 90°$ y $PB + PC = 10\sqrt{2}$ si O es centro del cuadrado, calcule: PO

A) 6 B) 10 C) 14
D) 8 E) 12

Resolución:



□BPCO (Ptolomeo)

$$x\mu\sqrt{2} = \mu a + \mu b$$

$$x\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$$

$$x = 10$$

Respuesta: B) 10

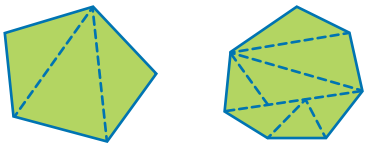
ÁREAS DE REGIONES TRIANGULARES Y SUS RELACIONES

DESARROLLO DEL TEMA

I. REGIONES POLIGONALES

Una región triangular es un conjunto de puntos, reunión de un triángulo y su interior.

Una región poligonal es la reunión de un número finito de regiones triangulares que se encuentran en un plano dado, tales que si dos cualesquiera de ellas se intersecan, su intersección es o bien un punto o un segmento



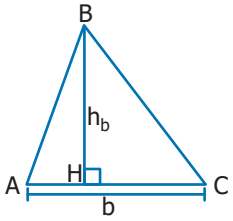
Las líneas punteadas en las figuras anteriores indican cómo se podría representar cada una de las dos regiones poligonales mediante tal reunión. Las regiones triangulares de cualquier descomposición así se llaman regiones triangulares componentes de la región poligonal.

A. Postulados

1. Dada una unidad de área, a cada región le corresponde un número único, llamado área de la región.
2. El área de una región poligonal es la suma de las áreas de cualquier conjunto de regiones componentes en el cual puede dividirse.
3. Si dos polígonos son congruentes, entonces las regiones poligonales correspondientes tienen la misma área.

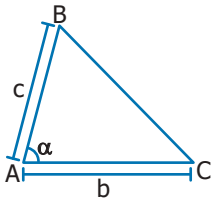
A continuación se presentan una serie de teoremas para calcular el área de diversas regiones triangulares.

Teorema fundamental



$$S = (1/2)h_b.b$$

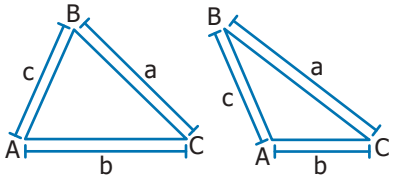
Teorema trigonométrico



$$S_{ABC} = \frac{bc}{2}\,Sen\alpha$$

Si S es máxima
$\Rightarrow \alpha = 90°$

Teorema de Arquímedes

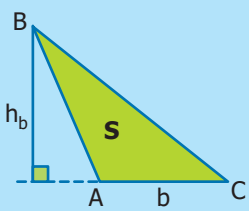


Donde "p" es el semiperímetro.

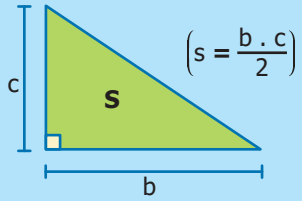
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Observaciones:

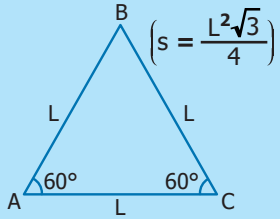
a) Para todo triángulo obtusángulo



b) Para un triángulo rectángulo.

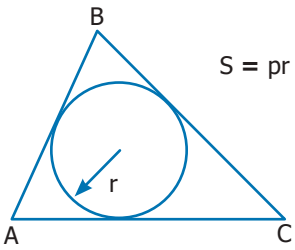


c) Para un triángulo equilátero



B. Teoremas adicionales

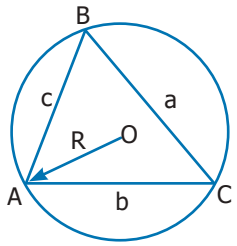
1. En función del inradio



$S = pr$

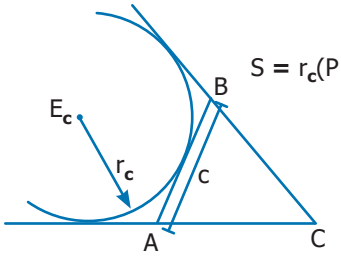
Donde "p" es el semiperímetro.

2. En función del circunradio



$S = \frac{abc}{4R}$

3. En función del ex-radio



$S = r_c(P \cdot C)$

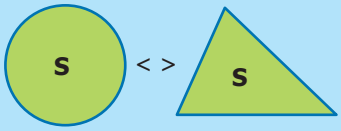
Donde "p" es el semiperímetro.

4. En función del inradio y los ex-radios

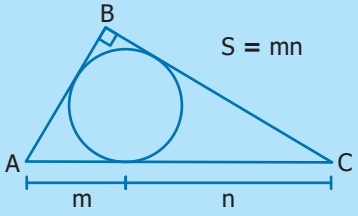
Sea "r" la medida del inradio de un triángulo ABC y "r_a", "r_b" y "r_c" las medidas de sus tres exradios, entonces: $S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$

Observaciones:

1. Dos figuras son equivalentes si tienen forma distinta pero igual tamaño. La siguiente figura muestra un círculo y una región triangular de igual área, es decir son equivalentes.

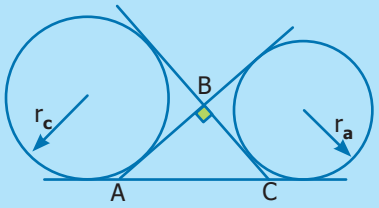


2. Para todo triángulo rectángulo



$S = mn$

3. Para todo triángulo rectángulo



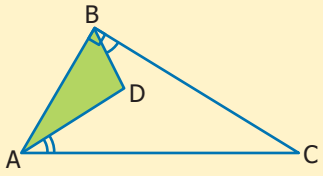
$S = r_a.r_c$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Calcula el área de la región sombreada si AB = 6μ, BC = 8μ y AC = 10μ.

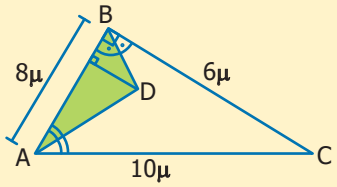
D es incentro de ABC.



A) $R = 5\ \mu^2$
B) $R = 19\ \mu^2$
C) $R = 8\ \mu^2$
D) $R = 10\ \mu^2$
E) $R = 9\ \mu^2$

UNMSM 2000
NIVEL FÁCIL

Resolución:



Piden: el área de la región sombreada.

Ya que D es el incentro del triángulo ABC, DE es el inradio.

Por el teorema de Poncelet:

$AB + BC = AC + 2(ED)$

$8u + 6u = 10u + 2(ED)$

$ED = 2u$

Sea R la región triangular ABC.

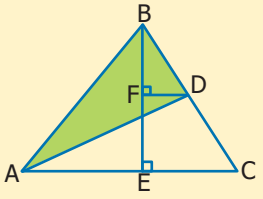
$R = \frac{AB \times ED}{2}$

$\therefore R = 8u^2$

Respuesta: C) R = 8 u²

Problema 2

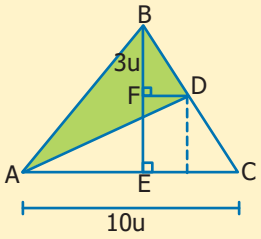
Calcula el área de la región sombreada si BF = 3 u y AC = 10 u.



A) 20 u^2 B) 12 u^2
C) 18 u^2 D) 15 u^2
E) 10 u^2

UNMSM 2001
NIVEL INTERMEDIO

Resolución:



Piden:

Se observa que:

- $S_{(ABD)} = S_{(ABC)} - S_{(ADC)}$ ..... (1)
- FE = DH ..... (2)

Ahora:

$$S_{(ABC)} = \frac{AC \times BE}{2} = 5\,u(3\,u + FE)$$

$$S_{(ADE)} = \frac{AC \times DH}{2} = 5\,u \times DH$$

De comparar lo obtenido con (1):

$S_{(ABD)} = 5u\,(3u + FE) = 5u(DH)$

$S_{(ABD)} = 15u2 + 5uFE - 5u(DH)$

$S_{(ABD)} = 15u^2 + \underbrace{5u(FE - DH)}_{\text{CERO}}$

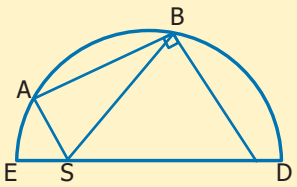
De comparar con (2)

$\therefore S_{(ABD)} = 15\ u^2$

Respuesta: D) 15 u^2

Problema 3

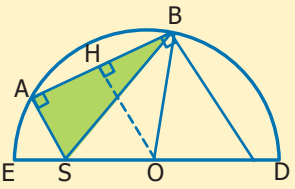
En el gráfico, calcula el área de la región triangular ABS.



A) 3,2 B) 7,5
C) 6,5 D) 4,5
E) 10,2

UNMSM 2004
NIVEL DIFÍCIL

Resolución:



Nos piden:

$$A(\triangle SAB) = \frac{AS \times AB}{2}$$

Desde O trazamos $\overline{OH} \perp \overline{AB}$

AH = HB = 3

También: OB = 5;

entonces: OH = 4

En el trapecio SABK:

$$OH = \frac{AS \times 5{,}5}{2}$$

$$\rightarrow AS = 2{,}5$$

Reemplazando:

$$\boxed{A(\triangle SAB) = 7{,}5}$$

Respuesta: B) 7,5

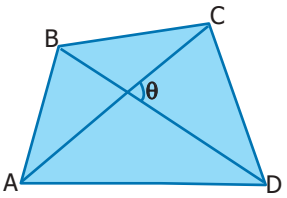
Pamer ACADEMIAS

ÁREAS DE REGIONES CUADRANGULARES Y SUS RELACIONES

DESARROLLO DEL TEMA

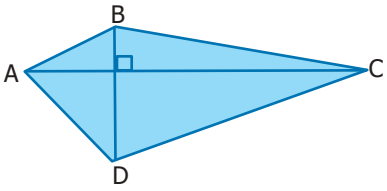
I. TEOREMAS

1.



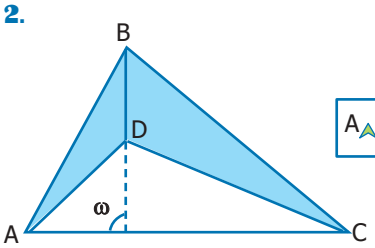
$$A_{\square ABCD} = \frac{(AC)(BD)}{2}\operatorname{Sen}\theta$$

Observación:



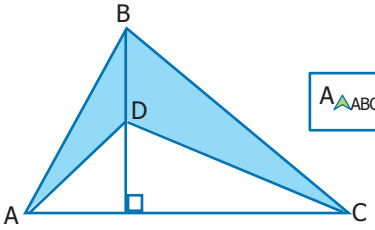
$$A_{\square ABCD} = \frac{(AC)(BD)}{2}$$

2.



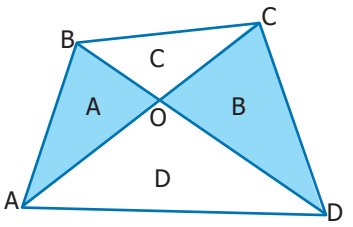
$$A_{\triangle} = \frac{BD(AC)}{2}\operatorname{Sen}\omega$$

Observación:



$$A_{\triangle ABCD} = \frac{(BD)(AC)}{2}$$

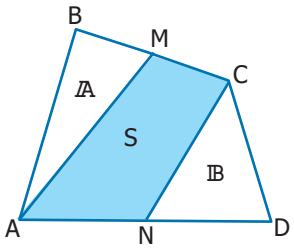
3.



Sean A, B, C y D las áreas de las regiones triangulares.
Se cumple:

$$A.B = C.D$$

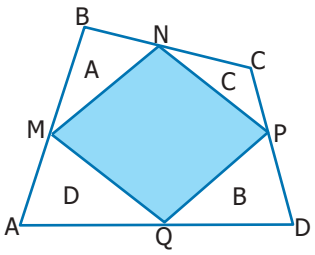
4.



Si : BM = MC
AN = ND

Se cumple: $S = \mathbb{A} + \mathbb{B}$

5.



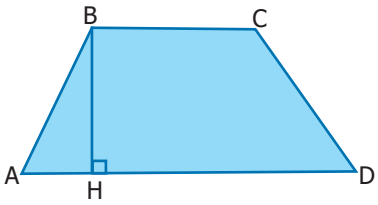
Si: AM = MB, BN = NC
CP = PD y AQ = QD
⇒ ▱ MNPQ: Paralelogramo

Se cumple: $A_{\square MNPQ} = \frac{A_{\square ABCD}}{2}$

además: $A + B = C + D$

II. ÁREA DE REGIONES TRAPECIALES

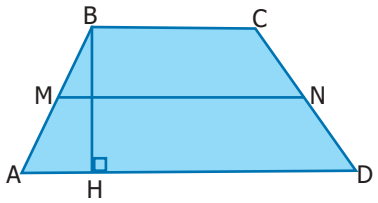
1.



Si: $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$

$$A_{\text{trapecio ABCD}} = \left(\frac{BC+AD}{2}\right)BH$$

2.

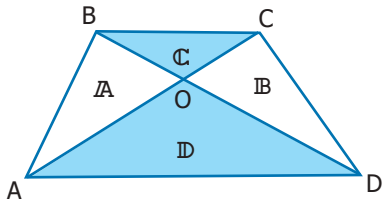


Si: $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$

BM = MA y CN = ND

$$\Rightarrow A_{\text{trapecio ABCD}} = (MN)(BH)$$

3.



Si: $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$

Se cumple: $\mathbb{A} = \mathbb{B}$

Además: A.B = C.D

$$\mathbb{A} = \sqrt{\mathbb{C}\mathbb{D}}$$

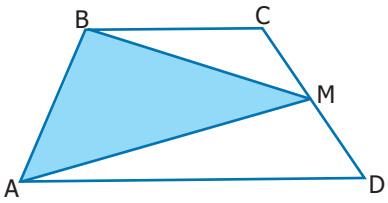
Luego:

$$A_{\square ABCD} = \mathbb{A} + \mathbb{B} + \mathbb{C} + \mathbb{D}$$

$$A_{\square ABCD} = 2\sqrt{CD} + C + D$$

$$A_{\square ABCD} = (\sqrt{\mathbb{C}} + \sqrt{\mathbb{D}})^2$$

4.



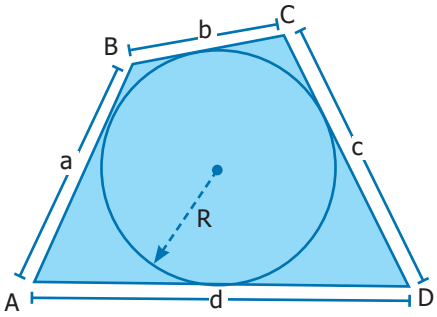
Si: $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$

CM = MD

$$\Rightarrow A_{\triangle BMA} = \frac{A_{\square ABCD}}{2}$$

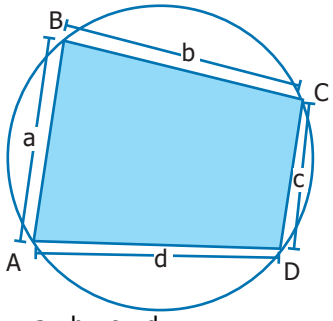
Teoremas

1.



$$A_{\square ABCD} = \left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)R$$

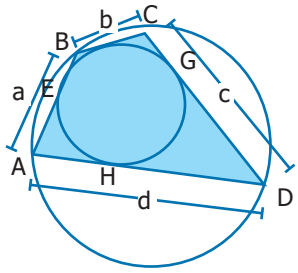
2.



Sea: $p = \frac{a+b+c+d}{2}$

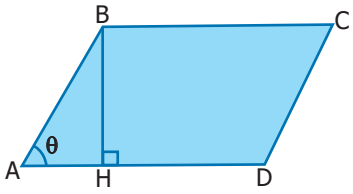
$$A_{\square ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

3. Cuadrilátero bicéntrico



$$A_{\square ABCD} = \sqrt{abcd}$$

III. ÁREA DE REGIONES PARALELOGRÁMICAS

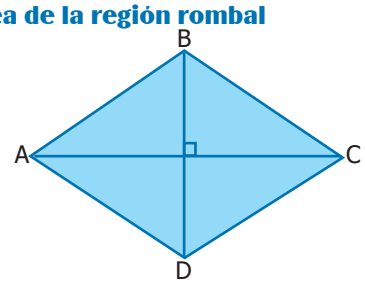


$A_{\square ABCD}$: Paralelogramo

$$A_{\square ABCD} = (AD)(BH)$$

$$A_{\square ABCD} = (AB)(AD)\text{Sen}\theta$$

A. Área de la región rombal

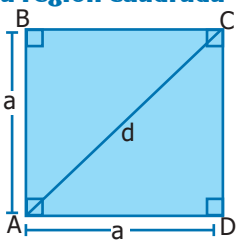


$$A_{\square ABCD} = \frac{(AC)(BD)}{2}$$

B. Área de la región rectangular

$$A_{\square ABCD} = (AB)(AD)$$

C. Área de la región cuadrada

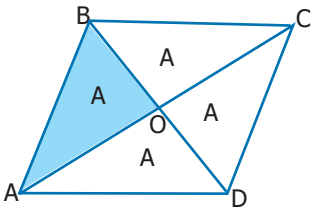


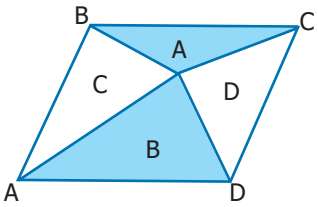
$$A_{\square ABCD} = a^2 \qquad A_{\square ABCD} = \frac{d^2}{2}$$

D. Propiedades

En regiones paralelográmicas.

1.

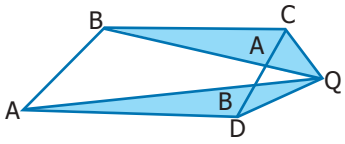




$$A + B = \frac{A_{\square ABCD}}{2}$$

$$C + D = \frac{A_{\square ABCD}}{2}$$

2.



$$A + B = \frac{A_{\square ABCD}}{2}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

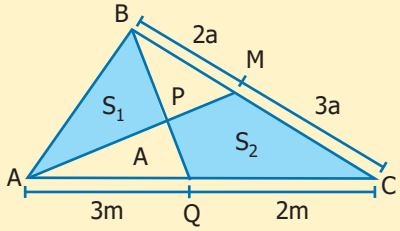
En un triángulo ABC, se trazan las cevianas interiores AM y BQ. (AM ∩ BQ) Calcule la razón de las áreas de las regiones ABP y PQCM. Si:

$$\frac{BM}{MC} = \frac{2}{3} \text{ y } \frac{AQ}{QC} = \frac{3}{2}$$

NIVEL INTERMEDIO

A) 2
B) 4
C) 6
D) 8
E) 1

Resolución:



Sea: $A_{\triangle APQ} = A$

De los datos:

Por razón de áreas

$$\frac{S_1 + A}{A_{\triangle ABC}} = \frac{3}{5}; \quad \frac{S_2 + A}{A_{\triangle ABC}} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow S_1 + A = S_2 + A \therefore \frac{S_1}{S_2} = 1$$

Respuesta: E) 1

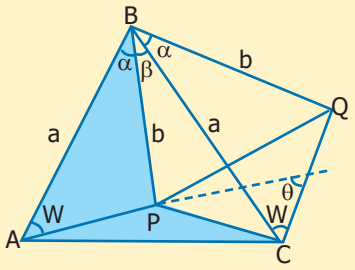
Problema 2

Se tiene los triángulos equiláteros ABC y PBQ, donde P está en la región interior y Q en la región exterior y relativa a BC, si: (AP)(CQ) = k. Calcule el área de la región no convexa BACP.

NIVEL INTERMEDIO

A) $\frac{k\sqrt{2}}{3}$
B) $\frac{k\sqrt{3}}{2}$
C) $\frac{k\sqrt{3}}{4}$
D) $2\frac{k\sqrt{3}}{4}$
E) $\frac{2\sqrt{3}}{4}$

Resolución:



Según el gráfico y por teorema general.

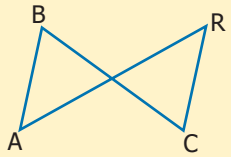
$$A_{\sphericalangle BACP} = \frac{(AP)(CQ)}{2}Sen\theta$$

Luego:

$\Delta ABP \cong \Delta CBQ$ (L – A – L)

$\Rightarrow m\sphericalangle BAP = w$ y

$m\sphericalangle BCQ = w$



$w + 60° = \theta + w$

$\theta = 60°$

Reemplazando:

$$A_{\sphericalangle BACP} = \frac{k}{2}Sen60°$$

$$A_{\sphericalangle BACP} = \frac{k\sqrt{3}}{4}$$

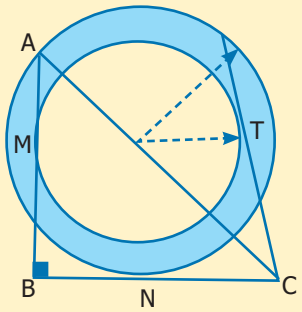
Respuesta: C) $k\sqrt{3}/4$

Problema 3

En la figura se muestra un triángulo rectángulo isósceles ABC. Calcular el área de la corona circular si $CT = 2\sqrt{3}$ y M, N y T son puntos de tangencia.

NIVEL FÁCIL

A) 3π
B) 6π
C) 5π
D) 2π
E) 4π



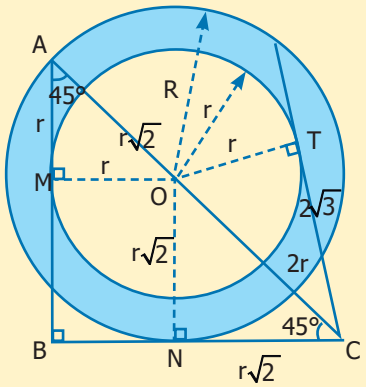
Resolución:

Se pide:

$$A_{corona} = \pi(R^2 - r^2) \ldots (1)$$

Del dato: AB = BC

$m\sphericalangle A = m\sphericalangle ACB = 45°$



En el ΔOMA se deduce:

$OM = MA = r$

$AO = r\sqrt{2} = ON$

En el ΔONC se deduce:

$ON = NC = r\sqrt{2}$

$OC = 2r$

ΔOTC (Notable 30° - 60°)

$r = 2 \rightarrow R = 2\sqrt{2}$

En (1): $A_{corona} = \pi((2\sqrt{2})^2 - 2^2)$

$\therefore A_{corona} = 4\pi$

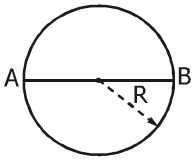
Respuesta: E) 4π

ÁREA DE REGIONES CIRCULARES Y SUS RELACIONES

SOII1G11

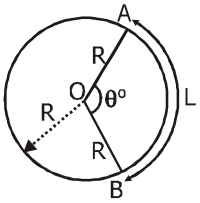
DESARROLLO DEL TEMA

I. ÁREA DEL CÍRCULO



$$S_{\bigcirc} = \pi R^2$$

II. ÁREA DEL SECTOR CIRCULAR

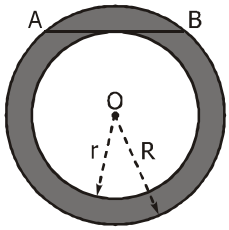


$$S_{\triangle} = \pi R^2 \frac{\theta}{360}$$

Observación

- El área de un sector circular de radio R y ángulo central α se calcula $\frac{R^2\alpha}{2}$ radianes

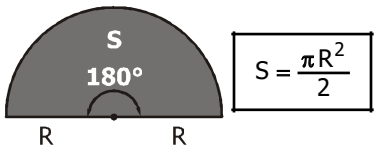
III. ÁREA DE LA CORONA CIRCULAR



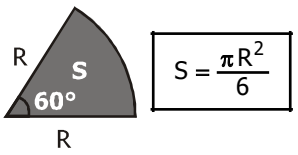
$$S_{\circledcirc} = \pi(R^2 - r^2)$$

$$S_{\circledcirc} = \frac{\pi(\overline{AB})^2}{4}$$

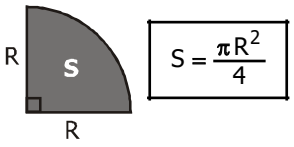
Observaciones:



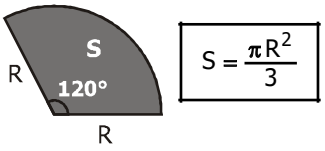
$$S = \frac{\pi R^2}{2}$$



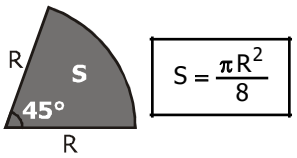
$$S = \frac{\pi R^2}{6}$$



$$S = \frac{\pi R^2}{4}$$



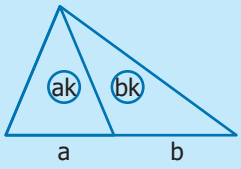
$$S = \frac{\pi R^2}{3}$$

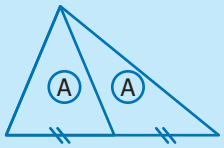


$$S = \frac{\pi R^2}{8}$$

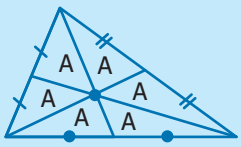
No olvides:

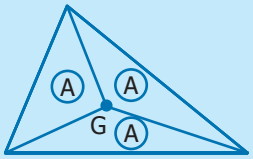
Relaciones de áreas triangulares

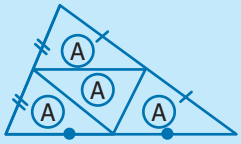




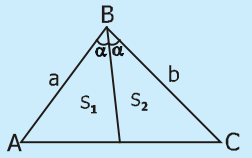
G→Baricentro







Nota:
Las áreas determinadas son proporcionales al lado de donde parte la bisectriz.

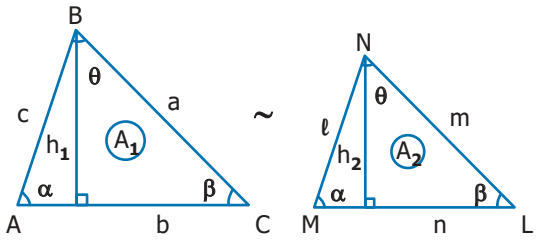


$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{a}{b}$$

Sugerencia:
Para relacionar área es importante recordar el teorema de Thales.

A. Para triángulos semejantes

Si el ABC es semejante al MNL.

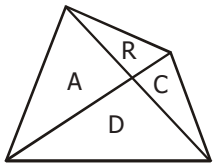


$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{a^2}{m^2}=\frac{b^2}{n^2}=\frac{c^2}{l^2}=\ldots=K^2$$

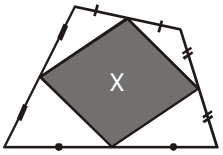
Nota:
Las áreas de todos los círculos son proporcionales al cuadrado de sus radios.

Propiedades:

1. Para todo cuadrilátero



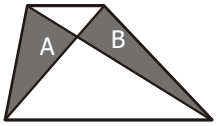
$A \times C = B \times C$



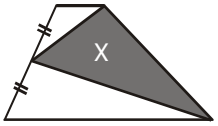
$x=\frac{A_{TOT.}}{2}$

Sugerencia:
- Para calcular el área de una región circular solo se necesita la longitud del radio y es necesario recordar las propiedades generales de una circunferencia.
- El área de un sector circular de radio R y ángulo central, se calcula $\frac{R^2\alpha}{2}$ ($\alpha \rightarrow$ radianes)

2. Para todo trapecio

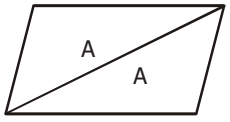


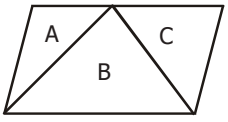
$A = B$

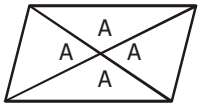


$x=\frac{A_{TOT.}}{2}$

3. En todo paralelogramo





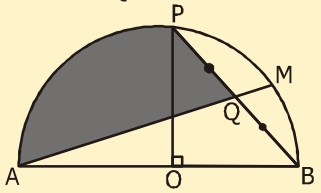


$B = A + C = \frac{A_T}{2}$

Nota:
Las áreas de todos los triángulos equiláteros son proporcionales a los cuadrados de sus lados.

PROBLEMAS RESUELTOS

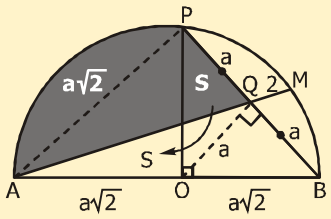
Problema 1
En el gráfico, calcula el área de la región sombreada. Si QM = 2.



UNMSM 2000–I
NIVEL DIFÍCIL

A) 18 B) 12 C) 15
D) 20 E) 10

Resolución:



1. Se une $\overline{PQ}$ y $\overline{AP}$
△APQ (Teorema de Pitágoras)
$(a\sqrt{2})^2 + a^2 = (AQ)^2$

$a\sqrt{5} = AQ$

2. □APQO es un trapecio.
Trasladando áreas.

$S_x = \frac{1\pi}{4}(a\sqrt{2})^2 \Rightarrow S_x = \frac{\pi a^2}{2}$

Teorema de las cuerdas

$a\sqrt{5} \cdot 2 = a \cdot a \Rightarrow 2\sqrt{5} = a$

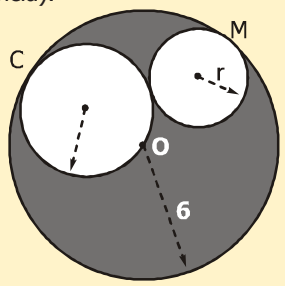
- Reemplazando:

$S_x = \frac{1}{2}(2\sqrt{5})^2\ \pi$ $\quad S_x = 10\ \pi$

Respuesta: 10 π

Problema 2

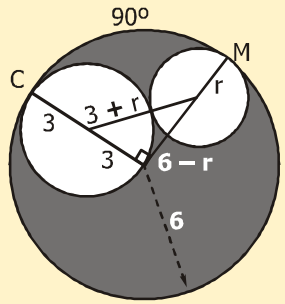
Calcula el área de la región sombreada, si $m\widehat{CM} = 90°$ (C, M y O son puntos de tangencia).



A) 10π B) 32π C) 23π
D) 30π E) 40π

UNMSM 2001–I
NIVEL INTERMEDIO

Resolución:



(Teorema de Pitágoras)

$3^2 + (6 - r)^2 = (3 + r)^2$

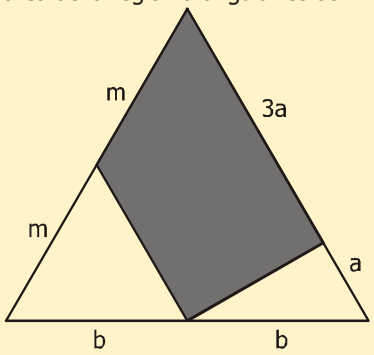
$9 + 6^2 - 2(6)(r) + r^2 = 3^2 + 2(3)(r) + r^2$

$S_x = 23\pi$

Respuesta: 23 π

Problema 3

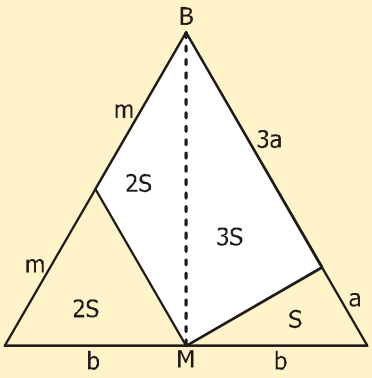
Calcula el área de la región sombreada, si el área de la región triangular es 80 m^2.



A) 28 m^2
B) 30 m^2
C) 18 m^2
D) 50 m^2
E) 20 m^2

UNMSM 2002–I
NIVEL FÁCIL

Resolución:



Se traza $\overline{BM}$, por relación de áreas:

$8S = 80\ m^2$

$S = 10\ m^2$.

Pero piden 5S

$\Rightarrow 5(10\ m^2) = 50\ m^2$

Respuesta: 50 m^2

RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

DESARROLLO DEL TEMA

I. DEFINICIÓN

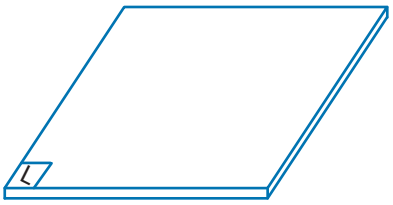
Es aquella parte de la geometría que estudia las figuras geométricas en el espacio.

II. PLANO

El plano se considera como una superficie llana e ilimitada en toda su extensión, y de espesor despreciable.

A. Representación geométrica de un plano

Tradicionalmente al plano se le representa mediante una región paralelográmica; eso no significa que no lo podemos representar por cualquier otra región plana.



Se uica la letra en una de sus esquinas.

Notación: $\square$L Se L.

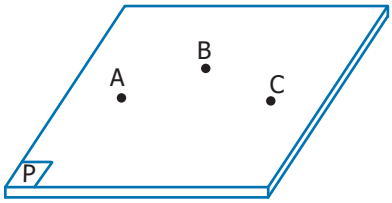
B. Determinación de un plano

Significa ubicarlo o fijarlo en un determinado lugar. Para que se entienda mejor, de manera análoga, citaremos un ejemplo real: Si deseamos que la pizarra queda fija en la pared, debemos apoyarla en la pared donde queramos fijarla y clavar en tres de sus esquinas.

A continuación veamos qué es necesario para determinar un plano:

Postulado

Con tres puntos no colineales se determina un plano.

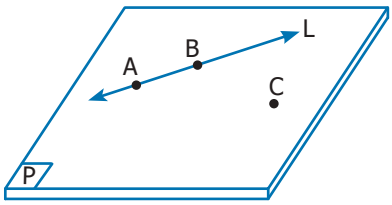


Sea A, B y C punto no colineales.

Entonces con los puntos A, B y C se determina el $\square$P.

Teorema 1

Con una recta y un punto que no pertenece a dicha recta se determina un plano.

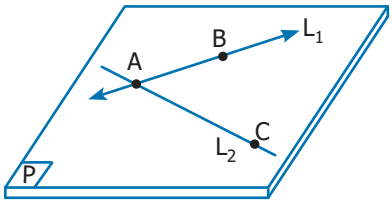


Sea C $\notin \overleftrightarrow{L}$ (A y B $\in \overleftrightarrow{L}$)

Entonces con C y $\overleftrightarrow{L}$ se determina el $\square$P.

Teorema 2

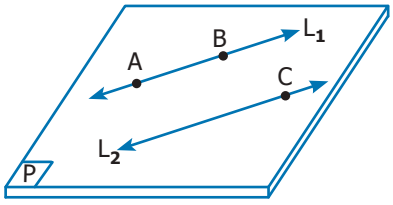
Con dos rectas secantes se determina un plano.



Como A y B $\in \overleftrightarrow{L_1}$, A y C $\in \overleftrightarrow{L_2}$.

Entonces con $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ se determina el $\square$P.

Teorema 3
Con dos rectas paralelas se determina un plano.

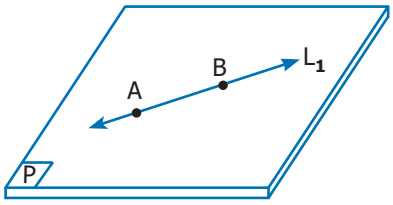


Como A y B $\in \overleftrightarrow{L_1}$ C $\in \overleftrightarrow{L_2}$ y $\in \overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_1}$
Entonces con $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$ se determina el $\square$P.

Posiciones relativas entre rectas y/o planos en el espacio
En el espacio se pueden analizar las posiciones relativas entre una recta y un plano, entre dos rectas y entre dos planos, las que explicaremos a continuación.

Entre una recta y un plano
Pueden ser una recta contenida, secante o paralela al plano.

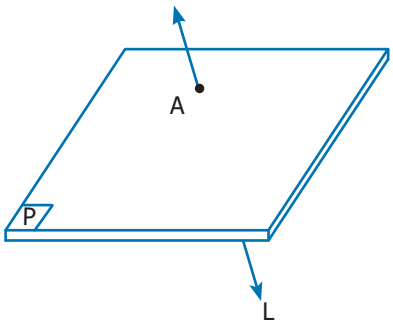
Recta contenida en el plano
Si los puntos de la recta pertenecen al plano.



Si A; B; ... $\in \overleftrightarrow{L}$ y A, B ... $\in \square$P.

$\rightarrow \overleftrightarrow{L} \subset \square$ P.

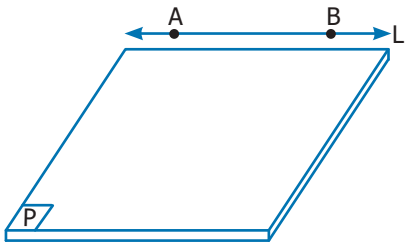
Recta secante al plano
Si la recta y el plano tienen un solo punto en común.



Si $\overleftrightarrow{L} \cap \square$P = {A}

$\rightarrow \overleftrightarrow{L}$ y $\square$ P son secantes

Recta paralela al plano
Si la recta y el plano no tienen un punto o puntos en común.



Si A, B $\in \overleftrightarrow{L}$ y A, B $\notin \square$P

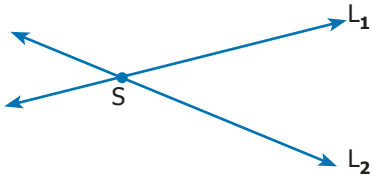
$\rightarrow \overleftrightarrow{L}$ y $\square$P son paralelos

Entre dos rectas:
Pueden ser paralela, secantes o alabeadas (cruzadas)

Rectas paralelas

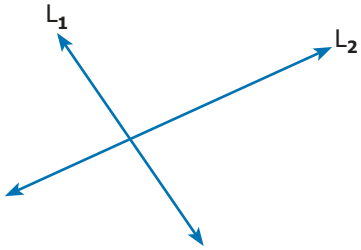
$\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ son coplanares $\overleftrightarrow{L_1} \cap \overleftrightarrow{L_2} = \phi$

Rectas secantes



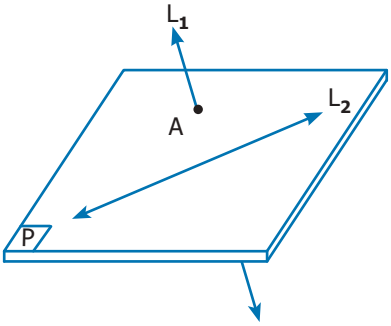
$\overleftrightarrow{L_1} \cap \overleftrightarrow{L_2}$ = {S}

Rectas alabeadas



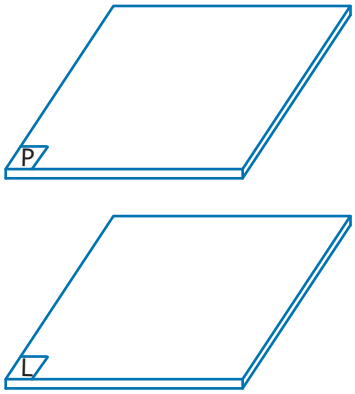
$\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ no son coplanares $\wedge$ $\overleftrightarrow{L_1} \cap \overleftrightarrow{L_2} = \phi$

A continuación se traza un plano que contenga a $\overleftrightarrow{L_2}$ e interseca a $\overleftrightarrow{L_1}$ para poder visualizarlo mejor.



Entre dos planos
Pueden ser planos paralelos o secantes

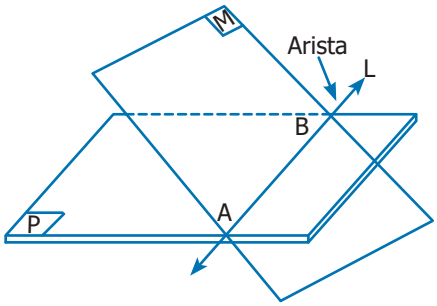
Planos paralelos
Son aquellos que no tienen ningún punto en común.



Si $\square P \cap \square L = \phi$

$\rightarrow \square P$ y $\square L$ son paralelos.

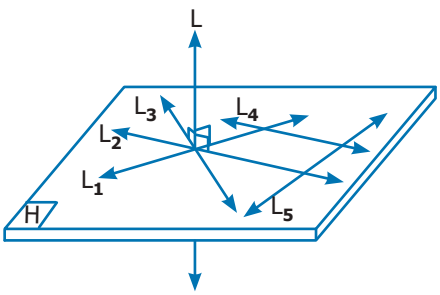
Planos secantes
Son aquellos que tienen en común una recta.



Si $\overleftrightarrow{L} \subset \square P$ y $\overleftrightarrow{L} \cap \square M$

$\rightarrow \square P$ y $\square M$ son secantes

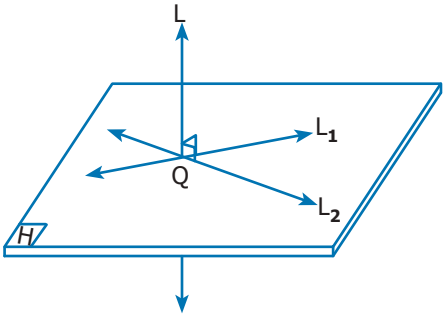
Recta perpendicular a un plano
Una recta perpendicular a un plano se define como aquella que es perpendicular a todas las rectas contenidas en dicho plano.



Sean $\overleftrightarrow{L_1}, \overleftrightarrow{L_2}, \overleftrightarrow{L_3} \ldots \overleftrightarrow{L_n}$ contenidas en $\square H$ y $\overleftrightarrow{L} \perp \square H$

$\rightarrow \overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{L_1}$
$\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{L_2}$
$\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{L_3}$
. . .
. . .
$\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{L_n}$

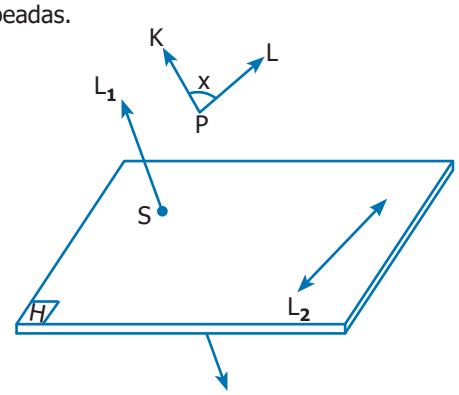
Condición para que una rceta sea perpendicular a un plano.
La condición necesaria y suficiente para que una recta sea perpendicular a un plano es que debe ser perpendicular a dos rectas secantes contenidas en dicho plano. Luego de esto podemos decir que la recta será perpendicular a todas las rectas contenidas en dicho plano.



Sean $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2} \subset \square H$
Si $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{L_2}$
$\rightarrow \overleftrightarrow{L} \subset \square H$

Luego $\overleftrightarrow{L}$ será perpendicular a todas las rectas contenidas en dicho plano.

Ángulo entre dos rectas alabeadas o cruzadas.
El ángulo entre dos rectas alabeadas es aquels cuya medida se determina al trazar, por un punto cualquiera del espacio, dos rayos que son paralelos a las rectas alabeadas.

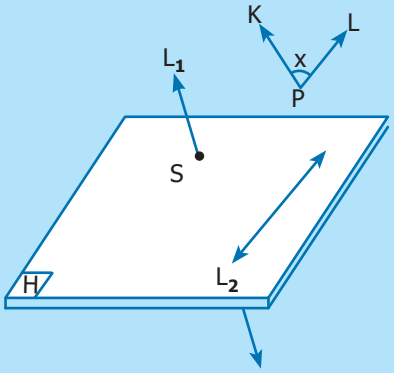


Para esto vamos a trazar $\square H$, que se contenga a $\overleftrightarrow{L_2}$ y que sea secante a $\overleftrightarrow{L_1}$ por cuestiones didácticas.

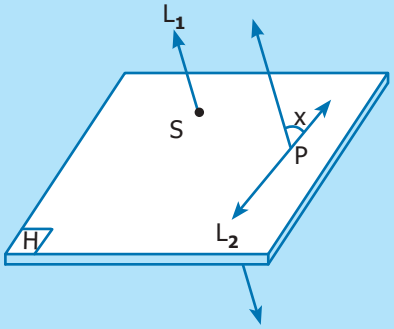
$\overleftrightarrow{L_1} \cap \square H = \{s\}$
$\overleftrightarrow{L_2} \subset \square H$

Sea P un punto del espacio. Entonces
$\overline{PL} // \overleftrightarrow{L_2}$ y $\overline{PK} // \overleftrightarrow{L_1}$
Por lo tanto x es la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$.

Nota:
Si: $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ son ortogonales, entonces x = 90°.



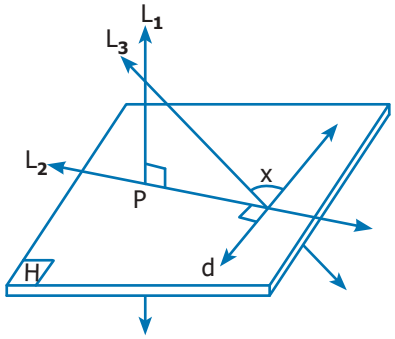
El punto P puede ser un punto de una de las rectas alabeadas o cruzadas.



Se sabe que $P \in \overleftrightarrow{L_2}$
Luego: $\overrightarrow{PR} // \overleftrightarrow{L_1}$
Por lo tanto, x es la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$.

Teorema de las tres perpendiculares

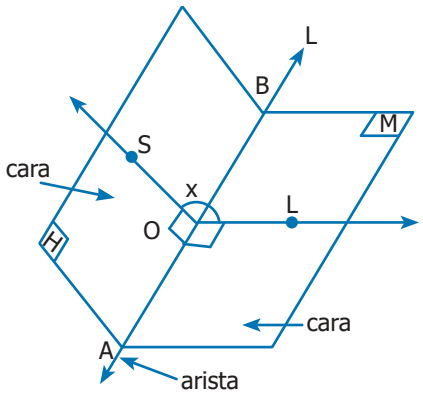
Si por el pie de una recta perpendicular a un plano se traza otra recta perpendicular y secante a una de las rectas contenidas en el plano, entonces por el pie de esta última recta y un punto cualquiera de la primera recta se determina otra recta perpendicular a dicha recta contenida en el plano mencionado.



Sea $\overleftrightarrow{L_1} \perp \square H$
$\overleftrightarrow{d} \subset \square H$
Si $\overleftrightarrow{L_2} \perp \overleftrightarrow{d}$
$(\overleftrightarrow{L_1} \cap \overleftrightarrow{L_2} = \{P\})$
$\rightarrow \overleftrightarrow{L_3} \perp \overleftrightarrow{d}$ (x = 90°)

Ángulo diedro

El ángulo diedro o simplemente diedro es la figura geométrica que se forma por la unión de dos semiplanos que tienen en común la recta de origen (la cual se denomina arista).



Notación

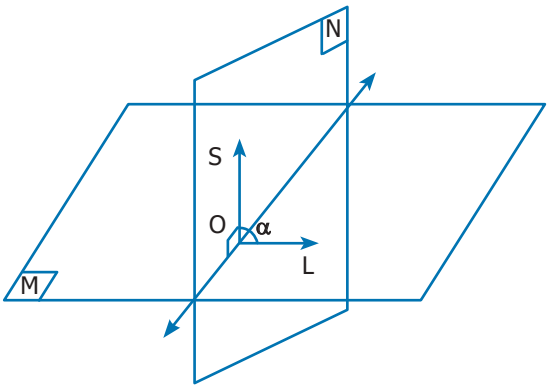
- Ángulo diedro $\overleftrightarrow{AB}$ o ángulo diedro.

  H – $\overleftrightarrow{AB}$ – M

- ∠SOL: ángulo plano o rectilíneo del ángulo diedro $\overleftrightarrow{AB}$.
- x. medida del ángulo diedro $\overleftrightarrow{AB}$

  ($\overrightarrow{OS} \perp \overleftrightarrow{L}$ y $\overrightarrow{OL} \perp \overleftrightarrow{L}$, además $\overrightarrow{OS} \subset \square H \wedge \overrightarrow{OL}) \subset \square M$)

Planos perpendiculares

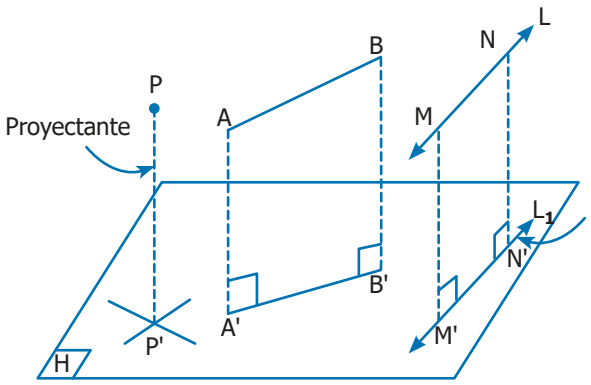


Sea $\square M \perp \square N$.

$\rightarrow \angle SOL$ es recto

(α = 90°)

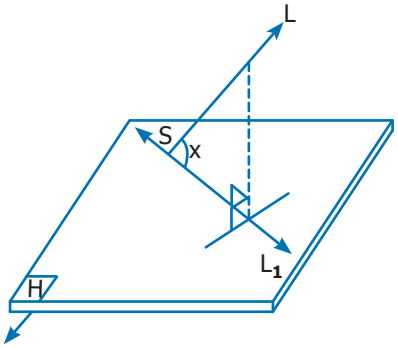
Proyección ortogonal de un punto un segmento y una recta respecto a un plano.



- P' proyección ortogonal de P sobre $\square$H
- A' y B': proyecciones ortogonales de A y B sobre $\square$H.
- M' y N' proyecciones ortogonales de M y N sobre $\square$H.
- $\overline{A'B'}$: proyecciones ortogonales de $\overline{AB}$ sobre $\square$H.
- $\overleftrightarrow{L_1}$: proyección ortogonal de $\overleftrightarrow{L}$ sobre $\square$H.

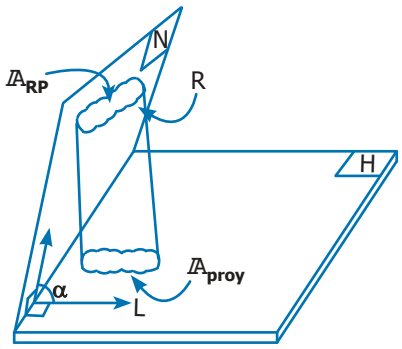
Nota:
$\overline{A'B'}$ puede ser congruente a $\overline{AB}$.
$\overleftrightarrow{L_1}$ puede ser paralela a $\overleftrightarrow{L}$

Ángulo entre una recta y un plano.
El ángulo entre una recta y un plano se define como aquel que determina la recta con su respectiva proyección ortogonal sobre el plano.



Sea $\overleftrightarrow{L}$ secante al $\square$ H y S.
$\overleftrightarrow{L_1}$: proyección ortogonal de $\overleftrightarrow{L}$ sobre $\square$H
x: medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{L}$ y $\square$H.

Proyeccón ortogonal de una región plana respecto a un plano.
El área de la proyección ortogonal de una región plana sobre un plano dado es igual al producto del área de dicha región y al coseno del ángulo de diedro determinado por el plano que contiene a dicha región y al plano dado.

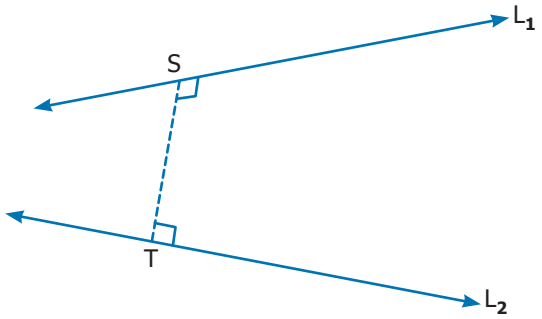


$\mathbb{A}_{proy} = \mathbb{A}_{RP} \cdot \cos\alpha$

Sea la región plana
- $\mathbb{A}_{RP}$: área de la región plana contenida en $\square$N.
- $\mathbb{A}_{proy}$: área de la proyección ortogonal de dicha región R sobre $\square$H.
- α: medida del ángulo diedro determinado por el $\square$ N y $\square$H.

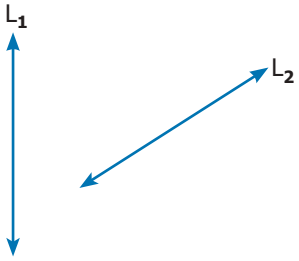
Nota:
Cuando $\square$N $\wedge$ $\square$H son paralelas, entonces $\mathbb{A}_{proy} = \mathbb{A}_{RP}$

Distancia entre dos rectas alabeadas.
La distancia entre dos rectas alabeadas es la longitud del segmento de recta común que es pependicular a dichas rectas.



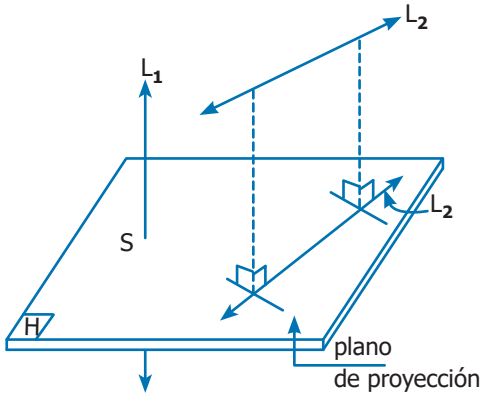
Sean: $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ alabeado o cruzadas.
Si $\overline{ST} \perp \overleftrightarrow{L_1} \wedge \overline{ST} \perp \overleftrightarrow{L_2}$
entonces: ST es la distancia entre $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$.

Método para hallar la distancia entre dos rectas alabeadas.
Para hallar la distancia entre dos rectas alabeadas, se debe trazar un plano perpendicular a una de las rectas y luego proyectarlas ortogonales sobre el plano mencionado. Finalmente la distancia entre las proyecciones (punto y recta) será la distancia entre las rectas alabeadas.

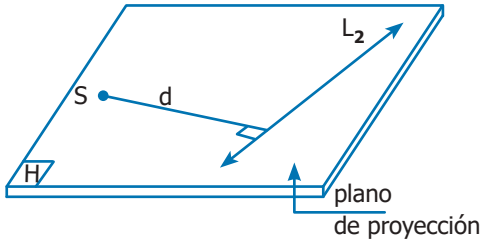


Sean $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ alabeadas

Se traza el $\square$H de manera perpendicular a $\overleftrightarrow{L_1}$.



$\square H \perp \overleftrightarrow{L_1}$.
$\overleftrightarrow{L_2}$: proyección ortogonal de $\overleftrightarrow{L_2}$ sobre $\square$H.
S: proyección ortogonal de $\overleftrightarrow{L_1}$ sobre $\square$H.

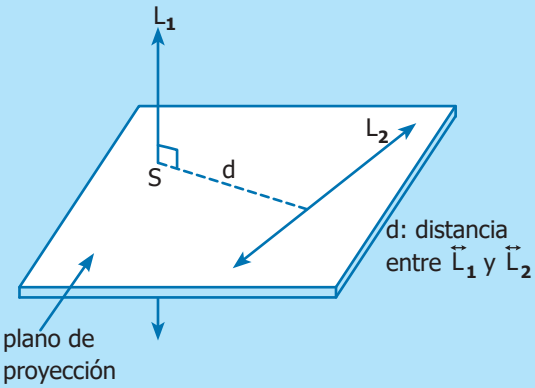


Se traza la perpendicular ST a $\overleftrightarrow{L_2}$.

ST = d: distancia entre $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$

Nota:

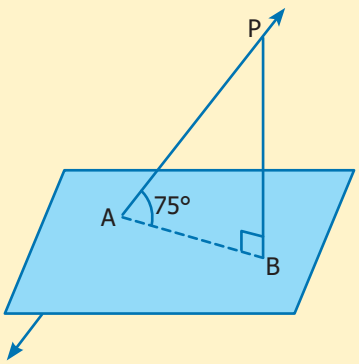
Si $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ son ortogonales, entonces el llamado plano de proyección podría ser el plano que contiene a uno de dichas rectas.



PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

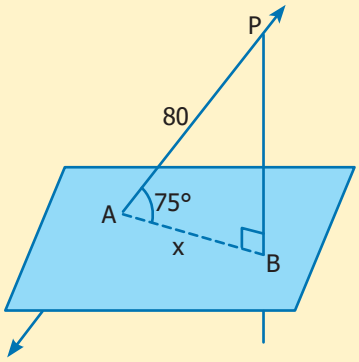
En el gráfico AP = 80 cm. Hallar AB.



A) $x = 20\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$cm
B) $x = 10\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$cm
C) $x = 15\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$cm
D) $x = 13\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$cm
E) $x = 12\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$cm

UNMSM 2007
NIVEL FÁCIL

Resolución:



Nos piden AB = x

Se sabe que $\triangle$ABP es notable de 15° y 75°.

$x = (\sqrt{6}-\sqrt{2})k$ y $4k = 80$

$\rightarrow x = (\sqrt{6}-\sqrt{2})20$

$x = 20\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$cm

Respuesta: aaa

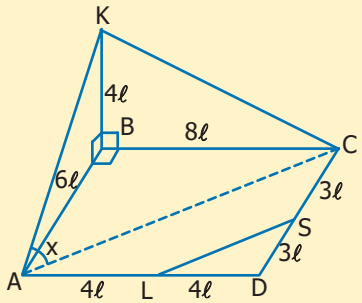
Problema 2

En un rectángulo ABCD se traza $\overline{BK}$ perpendicular al plano del rectángulo, luego se ubican los puntos medios L y S de $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$, $\frac{AB}{3} = \frac{BC}{4} = \frac{BK}{2}$.

Calcule la medida del ángulo $\overleftrightarrow{LS}$ y $\overleftrightarrow{AK}$.

NIVEL INTERMEDIO

Resolución:



Nos piden la medida del $\angle$entre $\overleftrightarrow{LS}$ y $\overleftrightarrow{AK}$ = x. Como podemos ver $\overline{AK}$ y $\overline{LS}$ son alabeados, para lo cual se traza $\overline{AC}//\overline{LS}$.

$\triangle ABK$: $AK = \sqrt{(4\ell)^2 + (6\ell)^2} \rightarrow AK = 2\sqrt{13}\ell$

$\triangle ABK$: $CK = \sqrt{(4\ell)^2 + (8\ell)^2} \rightarrow CK = 4\sqrt{5}\ell$

$\triangle ABK$: $AC = 10\ell$

$\triangle AKC$: por teore,a de cosenos.

$$(4\sqrt{5}\ell)^2 = (2\sqrt{13}\ell)^2 + (10\ell)^2 - 2(2\sqrt{13}\ell)(10\ell)\text{Cosx}$$

$$80 = 52 + 100 - 40\sqrt{13}\text{Cosx}$$

$$40\sqrt{13}\text{Cosx} = 72$$

$$\text{Cosx} = \frac{9}{5\sqrt{13}}$$

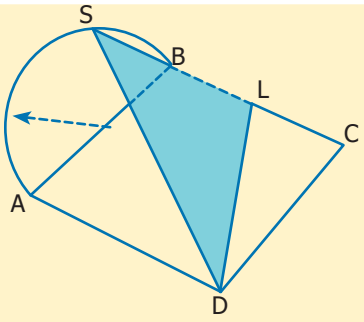
$$\text{Cosx} = \frac{9\sqrt{13}}{65}$$

$$x = \text{Ar cos}\left(\frac{9\sqrt{13}}{65}\right)$$

Respuesta: $x = \text{Ar cos}\left(\frac{9\sqrt{13}}{65}\right)$

Problema 3

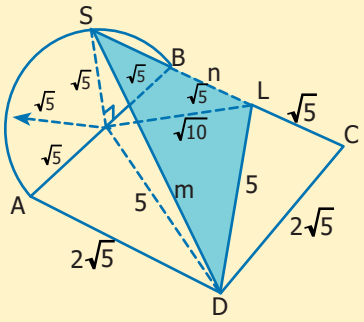
Del gráfico, el cuadrado ABCD y la semicircunferencia de diámetro AB se encuentran en plano perpendiculares, BL = LC = $\sqrt{5}$ y $m\widehat{AC} = m\widehat{SB}$. Calcule el área de la región triangular SLD.



UNMSM 2001–I

NIVEL INTERMEDIO

Resolución:



Nos piden: $\mathbb{A}_{SLD}$.

Dato: la semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y el cuadrado se encuentran en planos perpendiculares.

Como $\overline{SO} \perp \square ABCD$

$\rightarrow \overline{SO} \perp \overline{OD} \wedge \overline{SO} \perp \overline{OL}$

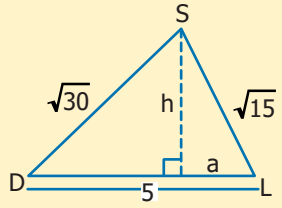
$\triangle SOD$: $m^2 = \sqrt{5}^2 + 5^2$

$m = \sqrt{30}$

$\triangle SOL$: $n^2 = \sqrt{5}^2 + \sqrt{10}^2$

$n = \sqrt{15}$

Teorema de Euclides:



$$\sqrt{30}^2 = \sqrt{15}^2 + 5^2 - 2(5)a$$

$\rightarrow a = 1 \wedge h = \sqrt{14}$

$$\mathbb{A}_{SLD} = \frac{(5)\sqrt{14}}{2}$$

Respuesta: $\mathbb{A}_{SLD} = \frac{(5)\sqrt{14}}{2}$

POLIEDROS REGULARES

DESARROLLO DEL TEMA

Objetivos:

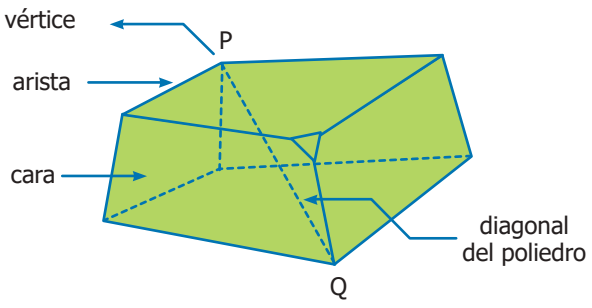
- Estudiar la forma de los poliedros, y reconocer los elementos principales y secundarios, así como también la relación que hay entre ellos.
- Analizar los poliedros regulares empleando fórmulas que permitan calcular su volumen y el área de la superficie que los limita.

I. POLIEDRO

Es el sólido geométrico limitado por cuatro o más regiones poligonales denominadas caras de poliedro.

El lado común a dos caras se denomina arista y al punto de concurrencia de las aristas se le denomina vértice del poliedro. Un poliedro se identifica según el número de caras.

N°. de caras	Nombre
4	Tetraedro
5	Pentaedro
6	Hexaedro
7	Heptaedro
8	Octaedro
9	Nonaedro
10	Decaedro



A. Diagonal

Es aquel segmento cuyos extremos son dos vértices de caras diferentes.

En todo poliedro se cumple

$$C + V = A + 2$$ **Teorema de Euler**

donde:

C: número de caras
V: número de vértices
A: número de aristas

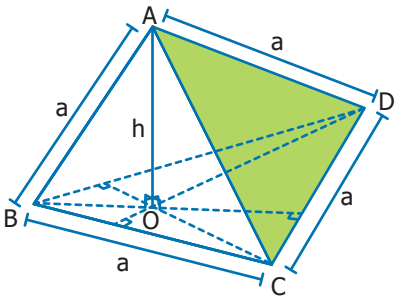
II. POLIEDRO REGULAR

Un poliedro regular es aquel que tiene por caras regiones poligonales regulares congruentes entre sí y en cada vértice concurren igual número de aristas.

Solamente existen cinco poliedros regulares, los cuales son tetraedro regular, hexaedro regular, octaedro regular, dodecaedro regular y el icosaedro regular. A continuación analizaremos los poliedros regulares.

A. Tetraedro regular.

Es aquel poliedro regular que se caracteriza por tener 4 caras que son regiones triangulares equiláteras.



Notación:

Tetraedro regular ABCD

Cálculo de la longitud de su altura.

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

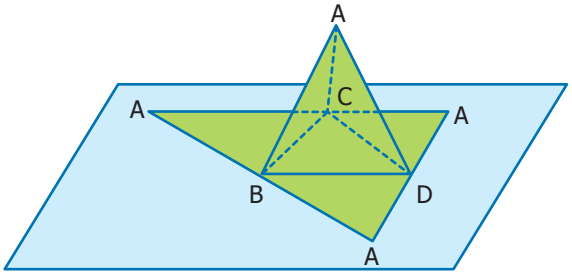
Área de la superficie total (A_{ST})

$$A = a^2\sqrt{3}$$

Cálculo del volumen (V)

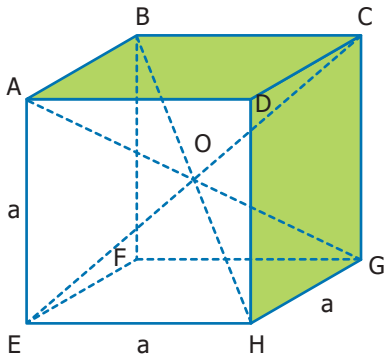
$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

- **Desarrollo de la superficie de un tetraedro regular:** En la figura se muestra un tetraedro regular cuyas caras son de cartón. Al desplegar sus caras y ubicarlas sobre un plano se observa una superficie triangular equilátero, la cual se denomina desarrollo de su respectiva superficie.



B. Hexaedro regular o cubo

Es aquel poliedro regular limitado por seis regiones cuadradas congruentes entre si.



Notación:

Hexaedro regular ABCID – EFGH

Diagonal del hexaedro: $\overline{AG}$, $\overline{BH}$, $\overline{CE}$ y $\overline{DF}$

a: longitud de la arista

O: centro del hexaedro regular

Cálculo de la diagonal

$$AG = BH = CE = DF = a\sqrt{3}$$

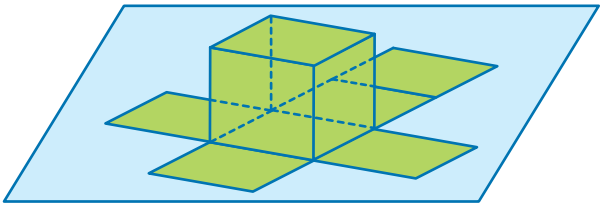
Área de la superficie total (A_{ST})

$$A_{ST} = 6a^2$$

Cálculo del volumen (V)

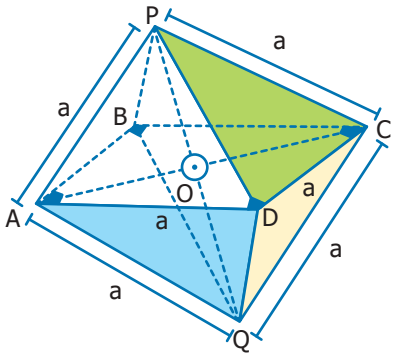
$$V = a^3$$

- **Desarrollo de la superficie de un hexaedro regular:** En la figura se muestra una caja de cartón cuya forma es cúbica. Al despejar sus caras y ubicarlas en un plano se obtiene lo que se denomina el desarrollo de su respectiva superficie.



C. Octaedro regular

Es aquel poliedro regular limitado por ocho regiones triangulares etquiláteras.



Notación:

Octaedro regular P – ABCD – Q

Diagonal del octaedro regular: $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ y $\overline{PQ}$

a: longitud de la arista

O: centro del octaedro regular

Cálculo de la diagonal

$$AC = BD = PQ = a\sqrt{2}$$

Área de la superficie total (A_{ST})

$$A_{ST} = 2a^2\sqrt{3}$$

Cálculo del volumen (V)

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

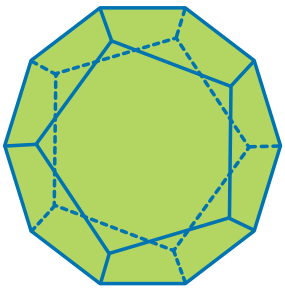
En un octaedro regular, si sus caras son de cartón, entonces se podrán desplegar, y al ubicarlas sobre una mesa (tal como se ha realizado con el tetraedro regular y el hexaedro regular) se obtendrán ocho cartones triangulares equiláteras. A dicho procedimiento se le denomina desarrollo de la superficie del octaedro regular. Sugerimos al lector realizar el proceso inverso para el tetraedro regular, hexaedro regular y el octaedro regular.

Estos procesos se pueden realizar también con el dodecaedro regular y el icosaedro regular.

D. Dodecaedro regular

Es el poliedro regular limitado por doce caras, las cuales son regiones pentagonales regulares y congruentes entre si.

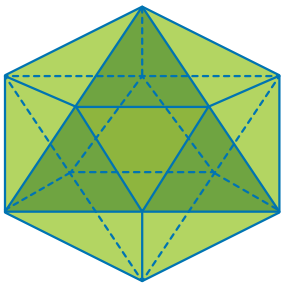
N° de caras 12
N° de aristas: 30
N° de vértices: 20



E. Icosaedro regular

Es el poliedro regular limitado por veinte caras, las cuales son regiones triangulares equiláteras congruentes ente si.

N° de caras: 20
N° de aristas: 30
N° de vértices: 12



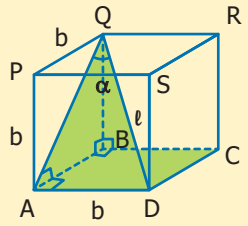
PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Se tiene un cubo de arista a, desde un vértice se traza una de sus diagonales y una de las diagonales de sus caras. Calcule el seno del ángulo que forman dichas diagonales.

UNMSM 2004–I

Resolución:



Nos piden Senα

Donde es la medida del ángulo que forman las diagonales de una cara y del cubo.

ABCD – PQRS es un cubo.

Sabemos que por el teorema delas tres perpendiculares

$\overline{QB} \perp \square ABCID$ (1.ª ⊥)

$\overline{BA} \perp AD$ (2.ª ⊥)

$\overline{AQ} \perp AD$ (3.ª ⊥)

Por lo tanto seno (◺QAD)

$Sen\alpha = \frac{AD}{QD}$

$Sen\alpha = \frac{b}{\ell}$ **(I)**

Pero por el teorema del cubo.

$\ell = b\sqrt{3}$

Reemplazando en (II) en (I)

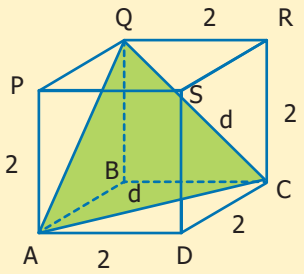
$sen\alpha = \frac{b}{b\sqrt{3}}$

$sen\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Problema 2

En un cubo de 2 m de arista se unen 3 vértices de modo que se forma un triángulo equilátero. Determine el área de dicho triángulo.

UNMSM 2009–I



Nos piden $A_{\triangle AQC}$

Dato: cubo ABCD – PQRS

DC = 2

Trazamos AQ, QC y AC, los cuales son diagonales de los cuadrados APQB y ABCD

AQC equilátero

$d = (2)\sqrt{2}$

$d = 2\sqrt{2}$

Por fórmula (región triangular equilétera)

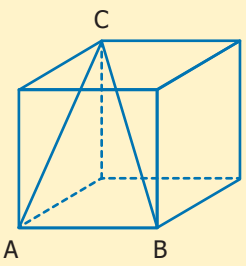
$A_{\Delta AQC} = \frac{d^2\sqrt{3}}{4}$

$A_{\Delta AQC} = \frac{(2\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}$

$A_{\triangle AQC} = 2\sqrt{3}m^2$

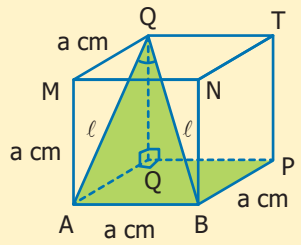
Problema 3

En el gráfico se tiene un cubo cuya arista mide a cm, donde $\overline{BC}$ es una diagonal y $\overline{AC}$ diagonal de una cara. Calcule el perímetro del triángulo ABC.



UNMSM 2011–I

Resolución:



Nos piden $2p_{\triangle ABC} = x$

donde:

$2p_{\triangle ABC}$: perímetro de la región triangular ABC

Dato:

ABPQ – MNTC es un cubo.

Observamos:

$$x = t + \ell + a\ cm \quad (I)$$

En el $\triangle AMC$ notable de 45°

$$t = a\sqrt{2}\ cm \quad (II)$$

Por diagonal del cubo:

$$\ell = (a\ cm)\sqrt{3} \quad (III)$$

Reemplazamos (III) y (II) en (I)

$$x = a\sqrt{2}\ cm + (a\ cm)\sqrt{3} + a\ cm$$

$$x = a(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})\ am$$

PRISMA Y CILINDRO

DESARROLLO DEL TEMA

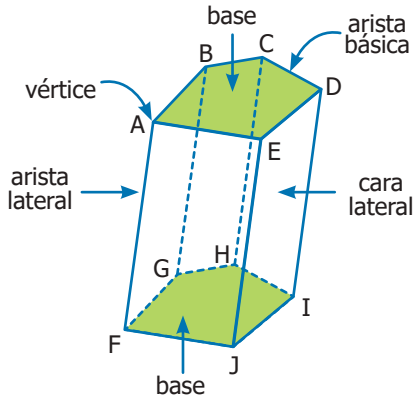
Objetivos:
- Identificar las características fundamentales del prisma y del cilindro.
- Reconocer los elementos básicos para calcular la superficie lateral, la superficie total, el volumen del prisma y del cilindro.

I. PRISMA

Es un poliedro en el cual dos de sus caras son regiones poligonales congruentes paralelas (son las denominadas bases) y las demás caras son regiones paralelográmicas (son las denominadas caras laterales).
Los prismas se clasifican según la inclinación de su arista lateral con respecto al plano de su base.

- **Arista lateral:** Es el segmento común entre dos caras laterales.
- **Arista básica:** Es el segmento común entre una cara lateral y una base.

Un prisma es nombrado según el número de lados que tenga una base. Por ejemplo, si la base tiene 6 lados, se denomina prisma hexagonal.



Notación:
Prisma pentagonal ABCDE – FGHIJ

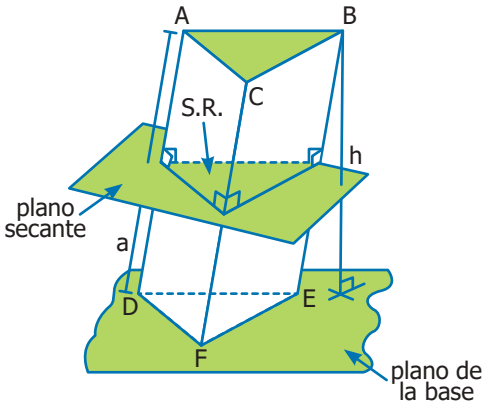
Este prisma tiene C = 7, V = 10 y A = 15. Como podemos ver, también cumple el teorema de Euler.

II. CLASIFICACIÓN

A. Prisma oblicuo

1. Sección recta (S.R.)

Es aquella sección plana que se determina en el prisma por un plano secante y perpendicular a todas las aristas laterales.



Notación
Prisma triangular oblicuo ABC – DEF

A continuación se indicará los cálculos que debemos conocer.

Área de la superficie lateral (A_{SL})

$$A_{SL} = (2P_{S.R.})a$$

$2p_{S.R.}$: perímetro de la sección recta.
a: longitud de la arista lateral

Área de la superficie total (A_{ST})

$$A_{ST} = A_{SL} + 2(A_{base})$$

A_{base}: área de la base

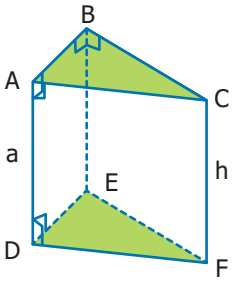
Volumen (V)

$$V = (A_{base})h$$

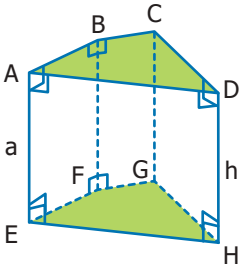
h: altura del prisma

B. Prisma recto

Un prisma es recto cuando sus aristas laterales son perpendiculares a las bases.



Notación: Prisma recto triangular ABC – DEF



Notación: Prisma recto cuadrangular ABCD – EFGH

Área de la superficie lateral (A_{SL})

$$A_{SL} = (2P_{base})h$$

$2P_{base}$: perímetro de la base; h: altura

Área de la superficie total (A_{ST})

$$A_{ST} = A_{ST} + 2(A_{base})$$

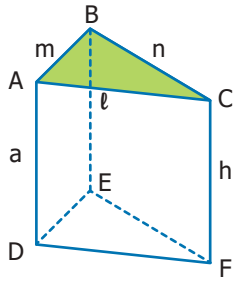
A_{base}: área de la base

Volumen (V)

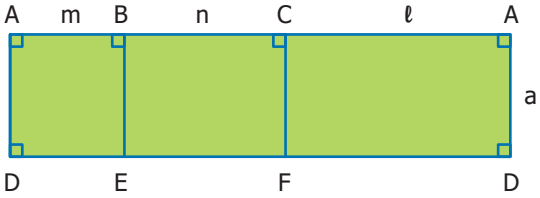
$$V = (A_{base})h$$

h: altura del prisma (a = h)

1. Desarrollo de la superficie lateral de un prisma recto triangular



A continuación se muestra el desarrollo de la superficie lateral.

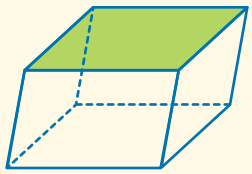


m, n y ℓ pueden ser iguales

Nota:

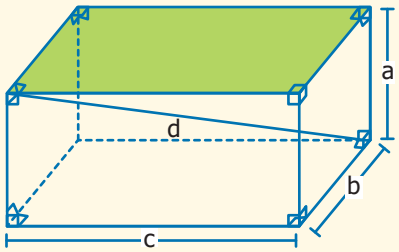
Paralelepípedo

Es aquel prisma cuyas bases son regiones paralelográmicas.



Paralelepípedo rectangular

Es aquel paralelepípedo cuyas caras son regiones rectangulares. También se le denomina rectoedro u ortoedro.



a, b y c son dimensiones del paralelepípedo rectangular; además tiene 4 diagonales, las cuales son congruentes y concurrentes.

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Áreas de la superficie lateral (A_{SL})

$$A_{ST} = 2(ab + ac)$$

Área de la superficie total (A_{ST})

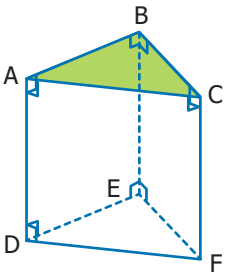
$$A_{ST} = 2(ab + bc + ac)$$

Volumen (V)

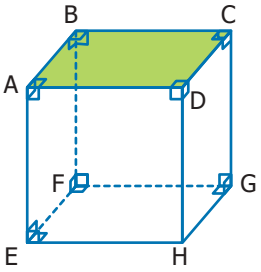
$$V = abc$$

C. Prisma regular

Es aquel prisma recto cuyas bases son regiones poligonales regulares.

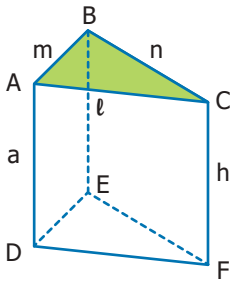


Notación: Prisma triangular ABC – DEF

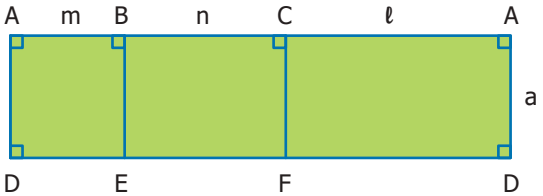


Notación: Prisma cuadrangular ABCD – EFGH

1. Desarrollo de la superficie lateral de un prisma regular triangular



A continuación se muestra el desarrollo de la superficie lateral.

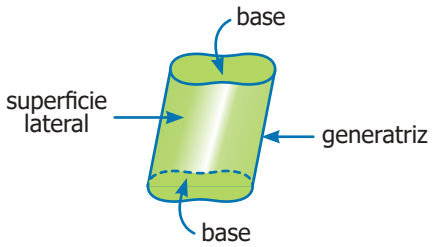


m, n y ℓ

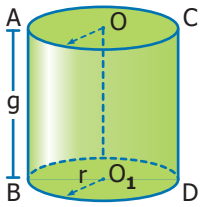
II. CILINDRO

Es aquel sólido geométrico comprendido entre dos planos paralelos entre sí y secante a una superficie curva cerrada denominada superficie lateral y en dichos planos paralelos se determinan secciones planas congruentes, las cuales se denominan bases.

- Las bases son paralelas y congruente
- Las generatrices son paralelas y congruentes.



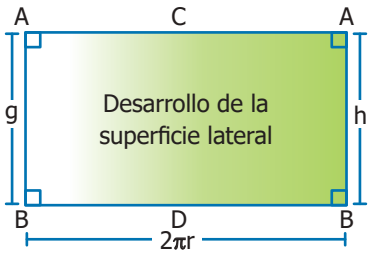
A. Cilindro circular recto o cilindro e revolución



Sección axial: Sección plana determinada en el cilindro por un plano que contiene a su eje ($\overleftrightarrow{OO_1}$)

1. Desarrollo de la superficie lateral del cilindro de revolución

Es una región plana limitada por un cuadrilátero equiángulo, cuyos dos lados tienen igual longitud que la circunferencia de una base y los otros dos tienen longitud que la generatriz del cilindro.



Área de la superficie lateral

$$A_{SL} = 2\pi r$$

Área de la superficie total

$$A_{SL} = 2\pi r(g + r)$$

Volumen (V)

$$V = \pi r^2 h$$

Nota:
El cilindro equilátero es aquel cilindro recto cuya sección axial es una región cuadrada.

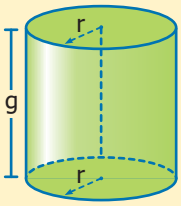
PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Si r es el radio de la base de un cilindro, con tapa, de volumen 100 cm^3, el área del material usado en la construcción del envase, expresado en función de r, es:

UNMSM 1997
NIVEL FÁCIL

Resolución:



Nos piden A_{mat}: área del material

$A_{mat} = 2\pi rg + 2\pi r^2$ **...(1)**

Del dato

$100 = V_{cil} = \pi r^2 g$

$g = \frac{100}{\pi r^2}$

Reemplazando en (1)

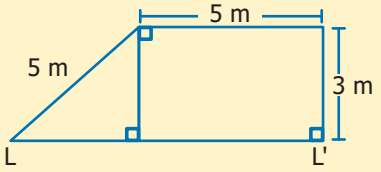
$A_{mat} = 2\pi r \times \left(\frac{100}{\pi r^2}\right) + 2\pi r^2$

$A_{mat} = 2\left(\pi r^2 + \frac{100}{r}\right) + cm^2$

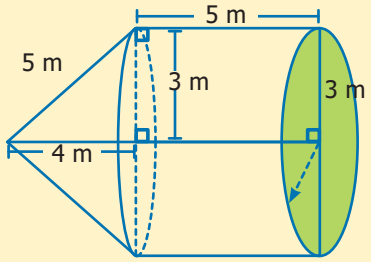
Problema 2

Al rotar la región sombreada un ángulo de 360° alrededor de la recta LL' se obtiene un sólido cuyo volumen es:

UNMSM 2000



Resolución:



Nos piden $V_{solido\ generado}$: V_{SG}

$V_{SG} = V_{cono} + V_{cilindro}$

$V_{SG} = \pi(3)^3 \times (4/3) + \pi(3)^2 \times (5)$

$V_{SG} = 12\pi + 45\pi$

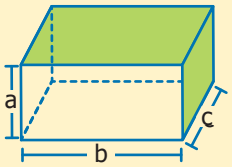
$\therefore V_{SG} = 57\pi\ m^3$

Problema 3

Las dimensiones de un paralelepípedo están en progresión aritmética y suman 24 u. Si el volumen es 440° u^3, calcule la dimensión de mayor longitud.

UNMSM 2006–I

Resolución:



Nos piden la dimensión de mayor longitud.

Datos: $a + b + c = 24$

$a \times b \times c = 440$

Como las dimensiones están en progresión aritmética.

$a = \ell - r$

$b = \ell$

$C = \ell + r$

$\ell - r + \ell + \ell + r = 24\ \ell = 8$

Del segundo dato

$(8 - r)(8)(8 + r) = 440$

$(8 - r)(8 + r) = 5 \times 11 \rightarrow r = 3$

Ahora podemos decir que la dimensión de mayor longitudes c

$c = 8 + 3$

PIRÁMIDE Y CONO

DESARROLLO DEL TEMA

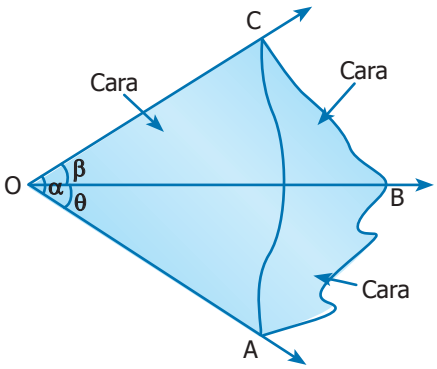
Objetivos:

- Estudiar la construcción y forma de las pirámides y los conos.
- Reconocer los elementos y la relación entre ellos, así como también su clasificación según las características de estos elementos.
- Identificar la similitud entre estos dos sólidos geométricos, tanto para calcular su volumen como para calcular el área de la superficie que los limita.

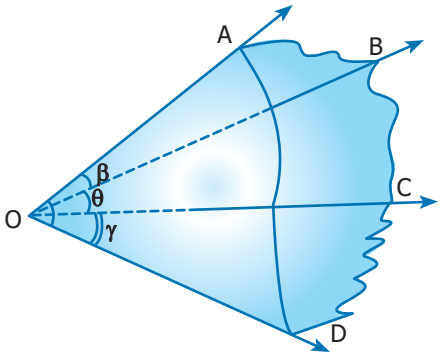
ÁNGULO POLIEDRO

Es aquella figura geométrica formada por tres o más regiones angulares (si tomamos dos regiones adyacentes no deben ser coplanares), que tienen vértice en común y comparte un lado de dos en dos.
Los nombres de los ángulos poliedros se debe a las cantidades de regiones angulares, las cuales se denominan caras de ángulo poliedro.

Gráficamente



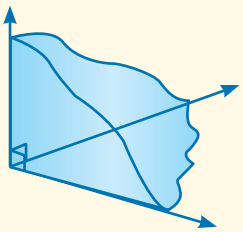
Notación: ángulo triedro O – ABC
α, β y θ: medidas de las caras



Notación: ángulo tetraedro O – ABCD
α, β, θ y γ medidas de las caras

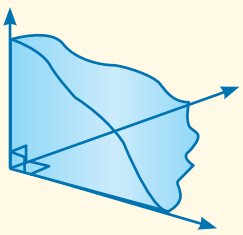
Nota:

Triedo birrectángulo



Cuando solo dos caras miden 90°.

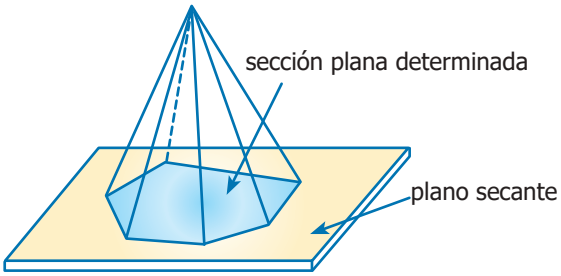
Triedo trirrectángulo



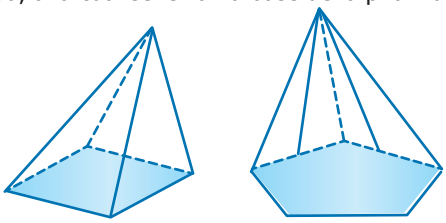
Cuando sus tres caras miden 90°.

PIRÁMIDE

Es aquel poliedro que se determina cuando un ángulo poliedro es intersecado por un plano secante a sus aristas.

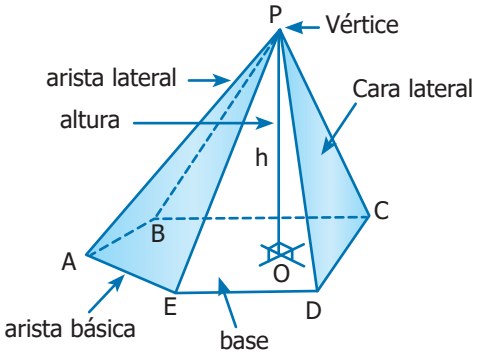


A una pirámide se le nombra de acuerdo a la sección plana determinada, a la cual se le llama base de la pirámide.



Pirámide cuadrangular Pirámide pentagonal

Elementos de una pirámide



Nota:
Una de las características de las pirámides es que no tienen diagonales.

Área de la superficie lateral (A_{SL})

A_{SL} = suma de las áreas de las caras laterales

Área de la superficie total (A_{ST})

$$A_{ST} = A_{ST} + 2(A_{base})$$

A_{base}: área de la base

Volumen (V)

$$V = \frac{(A_{base}).h}{3}$$

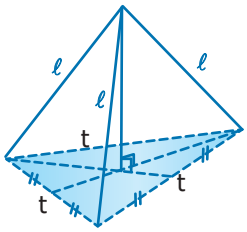
h: longitud de la altura

1. Pirámide regular

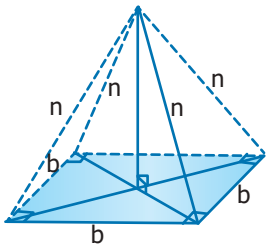
Es aquella pirámide cuya base está limitada por un polígono regular (triángulo equilátero, cuadrado, pentágono regular, etc.), además, todas sus aristas laterales son de igual longitud.

Ejemplo

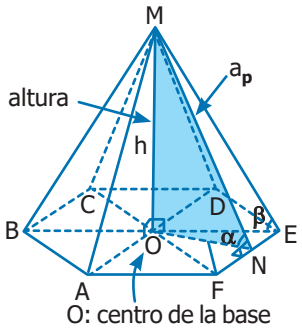
Pirámide triangular regular



Pirámide cuadrangular regular



En la siguiente figura se muestra una pirámide hexagonal regular M-ABCDEF.
Por medio de ella reconoceremos los elementos de las pirámides regulares.



- a_p: longitud del apotema de la pirámide (MN = a_p)
- ON: longitud del apotema del polígono regular ABCDEF.
- O: centro de la base de la pirámide.
- $\overline{MO}$: altura de la pirámide, O es el pie de dicha altura.
- α: medida del diedro formado por una cara lateral con la base.
- β: medida del ángulo formado por una arista lateral con la base.

$\triangle$MON: aplicando el teorema de Pitágoras

$$(ap)^2 = (ON)^2 + h^2$$

h: longitud de la altura de la pirámide

Nota:
Apotema de la pirámide regular (a_p)
Es la perpendicular trazada desde el vértice de la pirámide hacia una arista básica.

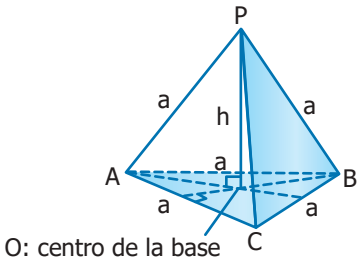
Área de la superficie lateral (A_{SL})

$$A_{SL} = p(a_p)$$

p: semiperímetro de la base

2. Tetraedro regular

Es aquella pirámide regular cuyas cuatro caras son regiones triangulares equiláteras.



O: centro de la base

Notación: Tetraedro regular P-ABC

Calculo de la longitud de su altura

$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Área de la superficie total (A_{ST})

$$A_{ST} = a\sqrt{3}$$

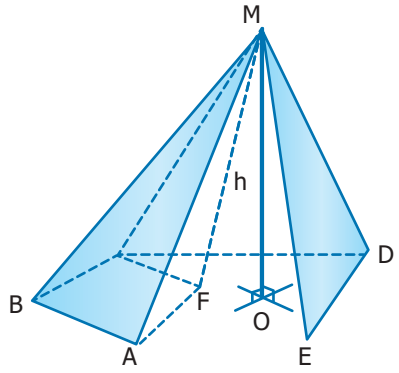
Volumen (V)

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

a: longitud de la arista

3. Pirámide irregular

Es aquella pirámide que no tiene todas las características de una pirámide regular.

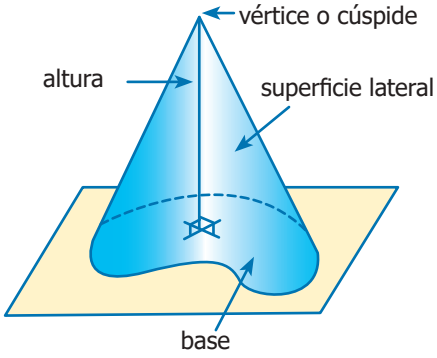


En el gráfico se muestran las siguientes pirámides irregulares:

- Pirámide pentagonal M-ABCDE
- Pirámide cuadrangular M-ABCF
- Pirámide pentagonal M-AFCDE

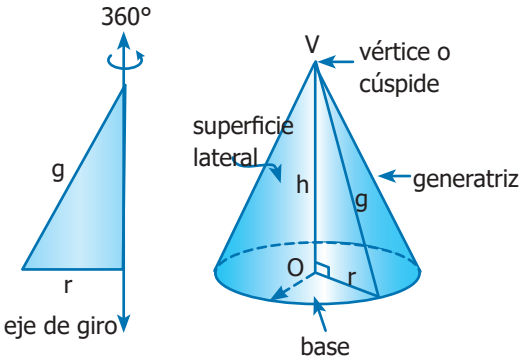
CONO

El estudio sistemático de las pirámides , el conocimiento de la circunferencia y algunas otras líneas curvas han conllevado a obtener y estudiar otras figuras, entre las cuales destaca el cono, el cual es muy parecido a una pirámide, con la diferencia de que su base es una región curva en lugar de una región poligonal.



1. Cono de revolución o cono circular recto

Es aquel sólido geométrico generado por una región triangular al girar 360° en torno a uno de sus catetos.

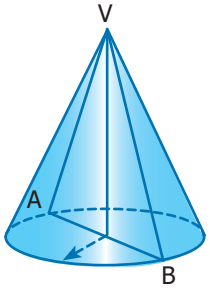


Elementos:

- O: centro de la base del cono
- r: radio de la base
- $\overline{OV}$: eje

Sección axial

Es la región triangular que tiene como lados a dos generatrices diametralmente opuestas.



▲AVB: sección axial del cono de revolución

Área de la superficie lateral (A_{ST})

$$A_{SL} = \pi rg$$

g: longitud de la generatriz

Área de la superficie total (A_{ST})

$$A_{ST} = A_{SL} + A_{base}$$

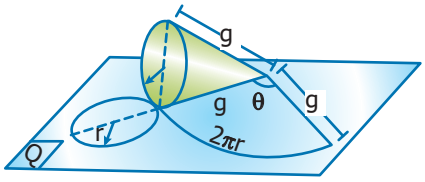
A_{base}: área de la base

Volumen (V)

$$V = \left(\frac{\pi r^2}{3}\right).h$$

h: longitud de la altura de la pirámide

Desarrollo de la superficie de un cono de revolución



La superficie lateral es equivalente con su respectivo desarrollo, el cual es un sector circular cuyo centro es el vértice del cono y tiene por radio a la generatriz.

$$A_{SL} = A_{sector}$$

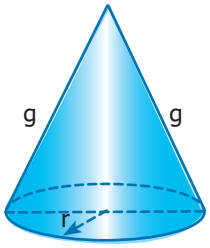
$$\rightarrow \pi rg = \frac{\theta \pi g^2}{360°}$$

Ángulo de desarrollo de la superficie lateral

$$\theta = \left(\frac{r}{3}\right).360°$$

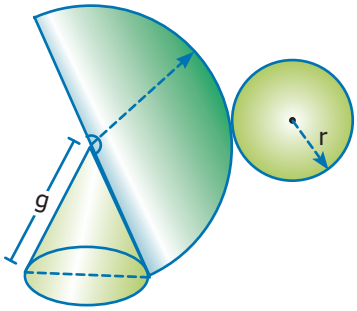
2. Cono equilátero

Es aquel cono de revolución cuyas generatrices tiene longitudes iguales a las del diámetro de la base (q = 2r).



g: longitud de la generatriz

En la figura se muestra un cono equilátero y el respectivo desarrollo de la superficie.

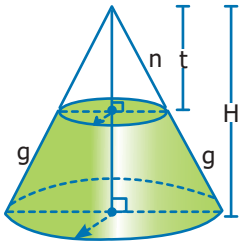


Tronco de cono de revolución

Es la porción de un cono de revolución determinada por dos planos paralelos y perpendiculares a su eje.

Todo tronco de cono de revolución tiene dos bases circulares.

El cálculo del área de la superficie lateral, total y el volumen depende del tipo de información que se tenga.



Área de la superficie lateral

$A_{SL} = \pi R(g + n) - \pi rn$

$A_{SL} = \pi Rg + \pi(R - r)n$

Por semejanza de triángulo (~Δ)

$$\frac{n}{n+g} = \frac{r}{R}$$

$\rightarrow n(R - r) = gr$

En (I)

$A_{SL} = \pi Rg + \pi rg$

Área de la superficie total

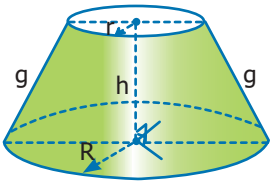
$A_{ST} = A_{SL} + A_{base1} + A_{base2}$

Volumen

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H + \frac{1}{3}\pi r^2 r$$

Por semejanza de triángulos (~Δ)

$$\frac{r}{R} = \frac{n}{n+g} = \frac{t}{H} \text{ y } h = H - n$$



En resumen:

Área de la superficie lateral (A_{SL})

$$A_{SL} = \pi(R + r)g$$

Área de la superficie total (A_{ST})

$$A_{ST} = A_{SL} + \pi r^2 + \pi R^2$$

Volumen (v)

$$V = \frac{h}{3}\pi(r^2 + R^2 + Rr)$$

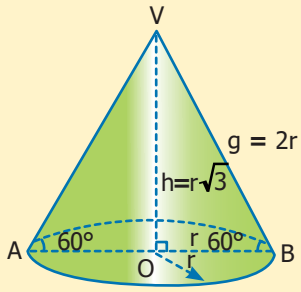
PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Calcule el volumen de un cono circular recto cuya área lateral es 96π cm^2, sabiendo que el ángulo que forma la generatriz con su base es 60°.

UNMSM 2003

Resolución:



Nos piden V_{cono}.

Donde: V_{cono} es el volumen del cono

Datos: $m\sphericalangle VBA = 60°$ y $A_{SL} = 96\pi$ cm^2

De la fórmula del volumen del cono

$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Del dato:

$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2(r\sqrt{3}) = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}r^3 \quad (I)$$

De la fórmula del área de la superficie lateral

$$A_{SL} = \pi rg$$
$$A_{SL} = \pi r(2r)$$
$$A_{SL} = 2\pi r^2$$

Pero del dato, $A_{SL} = 96\pi$

$$\rightarrow \quad 2\pi r^2 = 96\pi$$
$$r = 4\sqrt{3} \quad (II)$$

Reemplazamos (II) en (I)

$$V_{cono} = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}(4\sqrt{3})$$

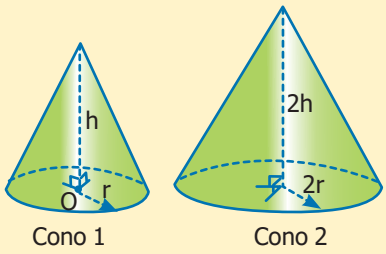
$$\therefore \quad V_{cono} = 192\pi \text{ cm}^3$$

Problema 2

Si se duplica, simultáneamente, la medida del radio de la base y la altura de un cono de revolución de volumen V, entonces el nuevo volumen es

UNMSM 2007-1

Resolución:



Nos piden V_x.

Donde: V_x es el volumen del cono 2.

Dato: V es el volumen del cono 1.

El cono 2 tiene el doble de radio y altura respecto al cono 1.

En el cono 2

$$V_x = \frac{1}{3}\pi(2r)^2 2h \quad (I)$$

En el cono 1

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \quad (II)$$

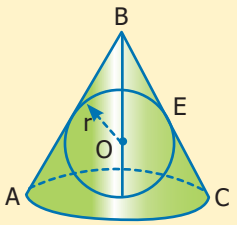
Reemplazamos (I) en (II)

$$\frac{V_x}{V} = \frac{\frac{1}{3}\pi(2r)^2 2h}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} \rightarrow \frac{V_x}{V} = 8$$

$$V_x = 8v$$

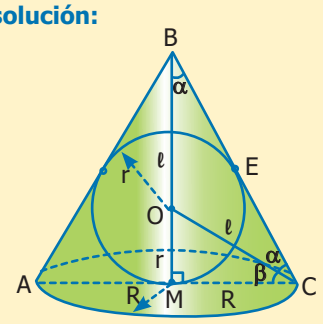
Problema 3

En el gráfico se sostiene una esfera inscrita en el cono de revolución cuyo volumen es 81π cm^3 y BO = OC. Halle el radio R de la esfera.



UNMSM 2010-1

Resolución:



Nos piden r.

Dato: BO = OC

$$V_{cono} = 81\pi \text{ cm}^3 \text{ d}$$

De la fórmula del volumenel cono

$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi R^2(\ell + r) \quad (I)$$

En el $\triangle$BMC

$$\alpha + \alpha + \beta = 90°$$

Por teorema, en la circunferencia

$$\alpha = b$$
$$3\alpha = 90°$$
$$\rightarrow \quad \alpha = 30°$$
$$MC = OM\sqrt{3}$$
$$\rightarrow \quad R = r\sqrt{3} \text{ y } CO = 2(OM)$$
$$\rightarrow \quad \ell = 2r \quad (II)$$

Reemplazamos (II) en (I) y con el dato del volumen

$$81\pi = \frac{1}{3}\pi(r\sqrt{3})^2(2r + r)$$

$$81 = \frac{1}{3}(3)(r)^2(3r)$$

$$\therefore \quad r = 3 \text{ cm}$$

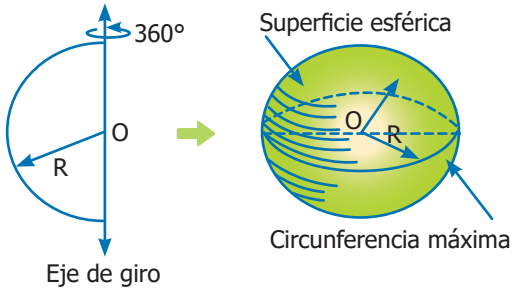
ESFERA Y PAPPUS-GULDIN

DESARROLLO DEL TEMA

I. SUPERFICIE ESFÉRICA

La superficie esférica es el lugar geométrico de todos los puntos del espacio que equidistan de otro punto fijo del espacio denominado centro.

La superficie esférica, es aquella superficie que se genera al hacer girar 360° una semicircunferencia al-rededor de su diámetro.



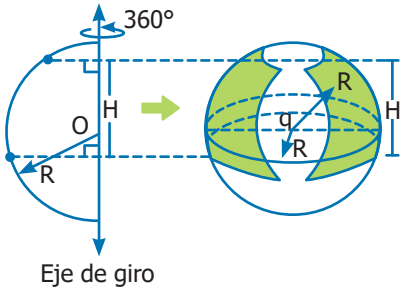
Área de la Superficie Esférica

$$A_{S.E.} = 4\pi R^2$$

A. Porciones notables de superficies esféricas

1. Zona esférica

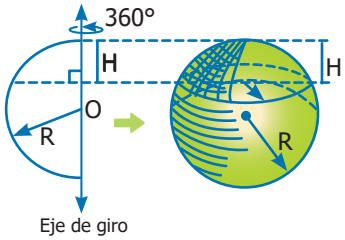
Es la superficie generada por una porción de arco de una semicircunferencia cuando se hace girar 360° alrededor de su diámetro.



Área de la zona esférica:

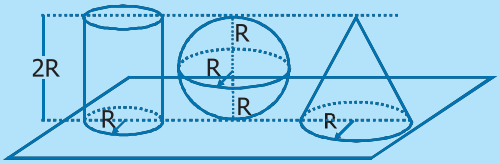
$$A_{Z.E.} = (2\pi R)H$$

2. Casquete esférico



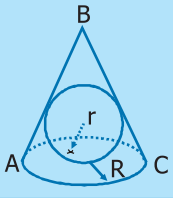
Observación:

- Si los sólidos de revolución (cilindro, cono y esfera) que tienen el mismo radio (R) y la misma altura (2R), sus volúmenes son proporcionales a 3; 2 y 1 respectivamente.



$$\frac{V_{cilindro}}{3} = \frac{V_{esfera}}{2} = \frac{V_{cono}}{1}$$

- Si el cono de revolución se inscribe una esfera se cumple:



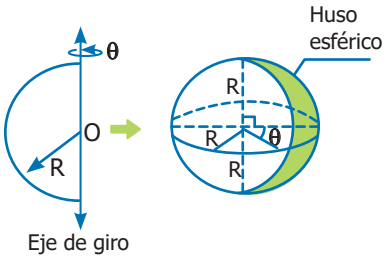
$$\frac{V_{cono}}{V_{esfera}} = \frac{S_{cono}}{S_{esfera}}$$

Área del casquete esférico

$$A_{CE} = (2\pi R)H$$

3. Huso esférico

Es la porción de superficie esférica comprendida entre dos semicircunferencia máximas que tienen en común su diámetro.



Área del huso esférico

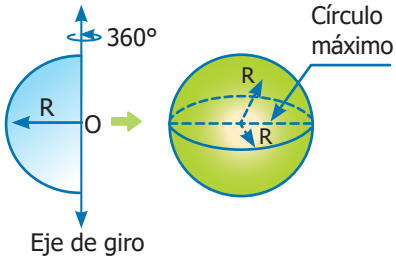
$\theta \rightarrow$ H.E.

$360° \rightarrow 4\pi R^2$

$$\rightarrow \boxed{A_{H.E.} = \frac{\theta \pi R^2}{90°}}$$

II. ESFERA

Es el sólido que se genera cuando se hace girar 360° un semicírculo alrededor de su diámetro.



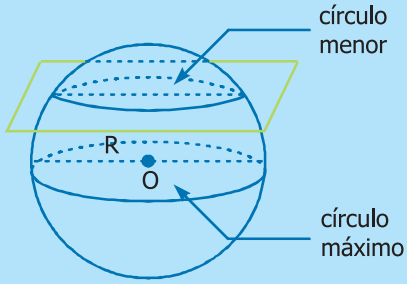
Volumen de la esfera

$$\boxed{V = \frac{4\pi}{3} R^3}$$

Al trazar cualquier plano secante a una esfera, en dicha esfera se determina una sección plana el cual es un círculo.

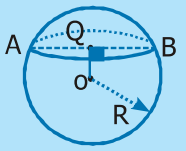
Nota:

Toda sección plana de una esfera es un círculo. Si el plano secante no pasa por el centro se obtendrá un círculo menor y si pasa por el centro un círculo máximo.



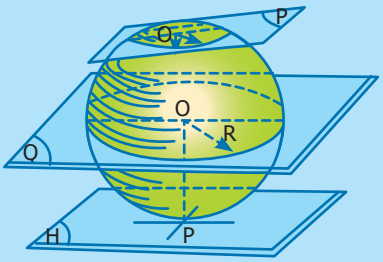
Nota:

- El segmento que une el centro de una esfera y el de un círculo menor de la esfera, es perpendicular al plano del círculo.



$\boxed{\overline{OQ} \perp \overline{AB}}$

- Si dicho círculo tiene por centro el centro de la esfera, entonces se denomina círculo máximo y si no contiene al centro se denomina círculo menor.



O: Centro de la esfera, también es centro del círculo máximo.

O_1: Centro del círculo menor.

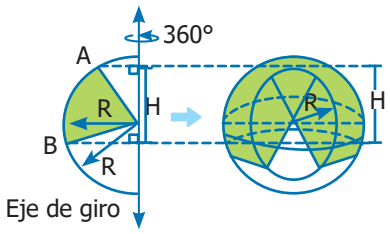
H: Plano tangente a la superficie esférica en P.

P y Q: Planos secantes a la esfera.

A. Porciones notables de la esfera (Sólidos de revolución)

1. Sector esférico

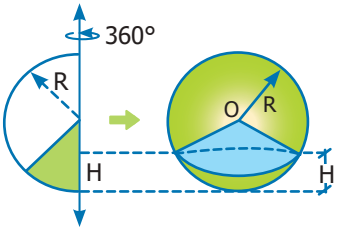
Es el sólido que se genera cuando se hace girar 360° un sector circular alrededor del diámetro de su respectivo círculo. (Según el gráfico)



Volumen del sector esférico

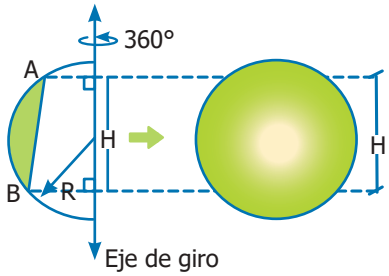
$$\boxed{V_{S.E} = \left(\frac{2\pi R^2}{3}\right).H}$$

H: longitud de la proyección del arco AB sobre el eje de giro.



2. Anillo esférico

Es el sólido que se genera cuando se hace girar 360° un segmento circular alrededor del diámetro de su respectivo círculo.

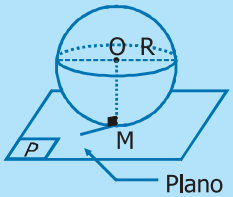


Volumen del anillo esférico

$$V_{A.E} = \frac{\pi}{6}(AB)^2.H$$

Nota:

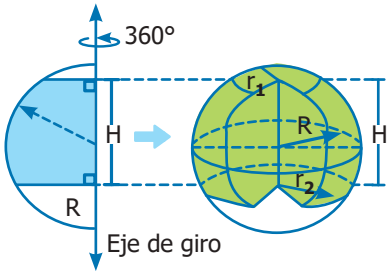
Todo plano tangente a una esfera es perpendicular al radio que pasa por el punto de contacto.



$\overline{OM} \perp \square P$

III. SEGMENTO ESFÉRICO DE DOS BASES

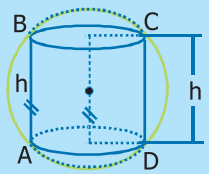
Es la porción de esfera comprendida entre dos planos paralelos y secantes a la esfera.



Volumen del segmento esférico de dos bases

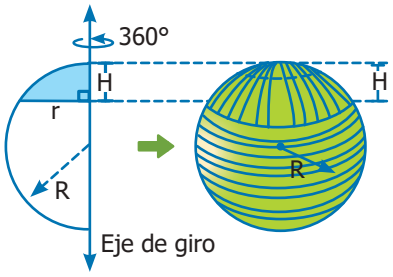
$$V_{S.E} = \frac{\pi H^3}{6} + \left(\frac{\pi r_1^2}{2}\right)H + \left(\frac{\pi r_2^2}{2}\right)H$$

Nota:



$$V_{ANILLOESF} = \frac{1}{6}\pi h^3$$

IV. SEGMENTO ESFÉRICO DE UNA BASE



Volumen del segmento esférico de una base

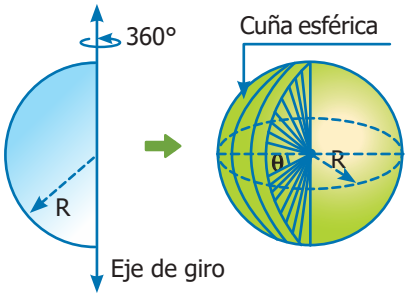
$$V_{S.E.} = \frac{\pi H^3}{6} + \frac{\pi r^2}{2}H$$

También: por relaciones métricas $r^2 = H(2R - H)$

Luego: $V_{S.E} = \frac{\pi H^2}{3}(3R - H)$

V. CUÑA ESFÉRICA

Es la porción de esfera comprendido entre dos círculos máximos que tienen su diámetro común.



Volumen de la cuña

$$\left.\begin{array}{l}\theta \rightarrow V_{C.E.} \\ 360° \rightarrow V_{Esfera}\end{array}\right\} \boxed{V_{C.E} = \frac{\theta}{360°}(V_{esfera})}$$

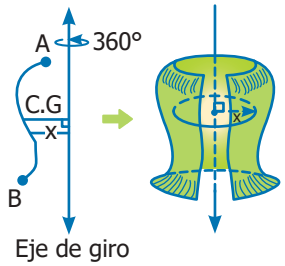
También: $V_{C.E.} = \frac{\theta \pi R^3}{270°}$

VI. TEOREMA DE PAPPU'S GULDING

El teorema de Pappus Gulding, se aplica para calcular el área de una superficie generada por una línea plana o para calcular el volumen de un sólido generado por una región plana cuando se hace girar 360° en torno a un eje coplanar de manera tal que no lo divide en dos partes a la línea o región, así tenemos:

A. Área de la superficie generada

El área de la superficie generada por una línea finita cuando se hace girar 360° alrededor de eje coplanar, es igual al producto de la longitud de la circunferencia que describe su centroide por la longitud de la línea.



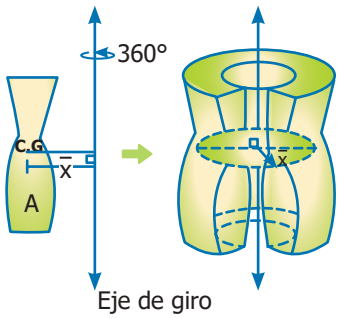
Área de la superficie generada

$$A_{S.G.} = (2\pi\overline{X})L$$

$\overline{X}$: Distancia del C. G. al eje
L : Longitud de la línea curva AB.
C.G. : Centroide de la línea

B. Volumen del sólido generado

El volumen del sólido generado por una región plana, cuando se hace girar 360° alrededor de un eje coplanar, es igual a producto de la longitud de la circunferencia que describe su centroide por el área de dicha región.



Volumen del sólido generado

$$A_{S.G.} = (2\pi\overline{X}).A$$

CG: centroide
$\overline{A}$: área de la región
$\overline{X}$: distancia del C.G al eje de giro

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema 1

Hallar el volumen de un segmento esférico, cuyo casquete tiene área 40 πm^2 y el radio de la esfera mide 10 m.

Resolución:

$S_{casq} = 40\pi$

Pero: $2\pi Rh = 40\pi$

Como R = 10, entonces h = 2

V_{segm} esf: $2/3\ \pi R^2 h$

$V = 400\ \pi/3\ m^3$

Problema 2

En una esfera da radio R una zona esfétrica tiene altura R/4 y es equivalente a un huso. Hallar el ángulo correspondiente al huso.

Resolución:

$$S_{zona} = 2\pi R\left(\frac{R}{4}\right) = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$A_{ruso} = \frac{\pi R^2}{90}\alpha$$

Como son equivalentes.

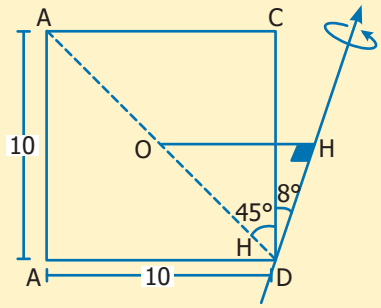
$$\frac{\pi R^2}{90}\alpha = \frac{\pi R^2}{2}$$

de donde $\alpha = 45°$

Problema 3

El lado de un cuadrado ABCD mide 10. Hallar el volumen del sólido al girar el cuadrado una vuelta alrededor de un eje que pasa por D haciendo un ángulo de 8° de manera exterior al cuadrado.

Resolución:



BD = $10\sqrt{2}$
OD = $5\sqrt{2}$
AODH
OH = $4\sqrt{2}$

Por teoreama de Pappus

$V = 2\pi(OH)(S_{\square})$
$V = 2\pi(4\sqrt{2})(10^2)$
$V = 800\ \pi\sqrt{2}$